GRUNDZÜGE

EINER

NEUEN STÖRUNGSTHEORIE

UND DEREN

ANWENDUNG AUF DIE THEORIE DES MONDES

ENTWORFEN

VON

DR. A. WEILER

PROF. IN MANNHEIM.

PUBLICATION DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT

XII.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1872.

VORWORT.

Die vorliegende Schrift enthält die Fortsetzung und weitere Ausführung der in Publication III in Angriff genommenen Untersuchungen. Wenn es meine Meinung gewesen ist, dass die vollständige Integration der Störungsgleichungen auf Grund der dort vorgebrachten Hilfsmittel keine weiteren Schwierigkeiten mehr bieten werde, so muss ich hier von vornherein bekennen, dass dieselbe etwas voreilig gewesen ist, da sich diese Hilfsmittel im Weiteren mancherlei Wandlungen gefallen lassen mussten.

In der Theorie des Mondes war man schon längst von der Annahme ausgegangen, dass die Sonne ihren scheinbaren Lauf nicht um den Mittelpunkt der Erde, welche als Centralkörper gedacht wird, sondern um den gemeinsamen Schwerpunkt der Erde und des Mondes beschreibe. Diese Verlegung des Brennpunktes der Ellipse ist nichts anderes, als eine lineare Transformation der rechtwinkeligen Coordinaten der Sonne, bezogen auf den Ort der als ruhend gedachten Erde. Es bieten sich der Analysis gewisse lineare Transformationen der rechtwinkeligen Coordinaten dar, welche geeignet sind, die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper in sehr merkwürdiger Weise zu vereinfachen. Jacobi, welcher schon vor dem Jahre 1842 zu diesen Vereinfachungen gelangt ist, hat übrigens eine Schwierigkeit in die Untersuchung gebracht, deren Grund in der von ihm getroffenen Wahl des Coordinatenursprungs zu suchen ist. Daher kam es, dass die lineare Transformation gerade auf diejenige Störungsaufgabe eine Anwendung nicht zuzulassen schien, in welcher sie sich in Wirklichkeit am fruchtbarsten erweist. Nachdem ich gefunden hatte, dass die in der Theorie des Mondes schon längst übliche Transformation der Coordinaten jener merkwürdigen linearen Transformation sich unterordnet, war ich in den Stand gesetzt, in dieser Theorie die Differentialgleichungen der Bewegung in einer einfachen Form aufzustellen, welche gestattet, die Resultate bis zu jeder beliebigen Grenze der Genauigkeit auszudehnen. Es sind dies zugleich diejenigen Differentialgleichungen, welche ohne irgend eine Beschränkung auch für jede andere dem Problem der drei Körper untergeordnete Störungsaufgabe den zweckmässigsten Ausgangspunkt geben.

Die Verwerthung der allgemeinen Bewegungsgleichungen in der Theorie des Mondes, wie sie in Publication III gemacht ist, hat insofern eine Bedeutung, als nun die dieser Theorie zum Grunde liegenden Störungsgleichungen geeignet sind, ohne irgend eine weitere Vervollständigung, die Erscheinung in allen ihren Einzelnheiten auszudrücken. Die bis dahin üblichen Störungsgleichungen waren dies zu leisten nicht im Stande. Vielmehr haben dieselben der Genauigkeit von vornherein gewisse unbestimmte Grenzen gesteckt, und es hat die Frage, wie man die nothwendigen Ergänzungen zu machen habe, oftmals Veranlassung zu Verlegenheiten gegeben. Ein Anderes aber sind die Schwierigkeiten, aus den vorliegenden Störungsgleichungen die endlichen Gleichungen herzuleiten, durch welche die Erscheinung dargestellt werden kann.

Insofern als die Integrationsschwierigkeiten alle Glieder, auch die von der ersten Potenz der Masse abhängigen betreffen, habe ich schon in Publication III ein neues Hilfsmittel in Vorschlag gebracht, welchem eine bedeutende Rolle in der Lösung des Problems zufällt. Abweichend von dem gewöhnlichen Verfahren, nach welchem das Integral als Funktion einer einzigen unabhängigen Veränderlichen dargestellt werden soll, habe ich dasselbe als Funktion zweier verschiedenen Veränderlichen aufgefasst. Dies sind die wahren Anomalien der beiden sich störenden Körper. Diejenigen Gleichungen, durch welche sich die beiden wahren Anomalien als Funktion der Zeit bestimmen, habe ich neben die fertigen Integrale hingestellt, da es sich nicht als förderlich erweist, die Elimination der beiden erstgenannten Veränderlichen in analytischer Form zu bewerkstelligen. Was ich in Publication III nur mehr andeutungsweise zu geben die Mittel hatte, hat sich bei der weiteren Verfolgung als sehr fruchtbar erwiesen; und auf Grund des obigen Vorschlags habe ich jetzt Gleichungen aufgestellt, unter deren Beistande die Integration eines vorliegenden Störungsgliedes ungemein erleichtert ist.

Diejenigen Schwierigkeiten der Aufgabe, welche von der zweiten und von den höheren Potenzen der Masse abhängen, treten vorzugsweise in der Theorie des Mondes hervor, mehr als in irgend einer anderen Störungsaufgabe, in solcher Weise, dass die Genauigkeit, welche mit alleiniger Berücksichtigung der Störungsglieder erster Ordnung erlangt wird, nicht im Stande ist, auch nur oberflächlichen Anforderungen zu genügen. Der grosse Einfluss dieser von den höheren Potenzen der Masse abhängigen Glieder ist in der That die Quelle der eigenthümlichen Schwierigkeiten, welche der Theorie des Mondes bis dahin entgegenstanden. Es sind dies diejenigen Schwierigkeiten, welche dem grossen Entdecker des Gravitationsgesetzes zu besiegen nicht mehr vergönnt gewesen ist. Dieselben haben bewirkt, dass Newton in seiner Erklärung der Evektion des Mondes und der Bewegung des Perigäums über eine gewisse Grenze der Genauigkeit nicht hinausgekommen ist, welche von der Wirklichkeit bedenkliche Abweichung zeigt.

Diesen Theil der Aufgabe betreffend habe ich in Publication III geglaubt, im Wesentlichen mich derjenigen Betrachtungsweise anschliessen zu müssen, welche allgemein maassgebend gewesen ist, seitdem man sich überhaupt mit den Störungsaufgaben beschäftigt. Es ist eine so gewöhnliche Erscheinung, dass jeder Fortschritt auf ältere als feststehend zu betrachtende Errungenschaften gegründet ist. Das Verfahren, wonach die von den höheren Potenzen der Massen abhängigen Glieder in der bisherigen Störungstheorie gebildet werden, gründet sich auf die Variation der elliptischen Elemente. Es lassen sich diesem Verfahren vortheilhafte Seiten abgewinnen. Ins Besondere darf man auf die Kürze der Herleitung und auf die geometrische Anschaulichkeit der darauf gegründeten Störungsgleichungen hinweisen. Ich habe mich lange Zeit vergeblich bemüht, diesen Weg verfolgend, auf den Schultern der Vorgänger einen festen Standpunkt zu gewinnen. In Publication III habe ich geglaubt, dass gewisse Funktionen der elliptischen Elemente als unbekannte Veränderliche in die Störungsgleichungen eingeführt werden sollen. Ich habe derartige Bemühungen endlich ganz aufgeben müssen. Von der Variation der elliptischen Elemente Gebrauch machend, steht man nur allzubald vor ernsten Verwicklungen, welche nicht sehr geeignet sind, das Vertrauen in die Möglichkeit einer vollständigen analytischen Lösung des Problems zu befestigen.

Ich habe jetzt eine andere Methode aufgestellt, welche eine freiere Bewegung der Analysis gestattet. In einer sehr wesentlichen Rücksicht ist dieselbe mit der bisherigen Störungstheorie in Uebereinstimmung. Diese Uebereinstimmung beruht auf der eigenthümlichen Form, in welcher die unbekannten Veränderlichen dargestellt werden sollen. Man gelangt nämlich jedesmal zu Quadraturen, welche unter dem

Integralzeichen die unbekannten Veränderlichen selbst enthalten. In der neuen Theorie aber sind die elliptischen Elemente nicht mehr diejenigen Grössen, welche, als unbekannte Veränderliche gedacht aus den Störungsgleichungen bestimmt werden; als solche habe ich zum Theil andere Grössen verwendet, welche sich übrigens ebenso, wie die elliptischen Elemente, in der ungestörten elliptischen Bewegung als Beständige darstellen. Die weiteren Untersuchungen haben darauf hin zu einer Anschauungsweise der Störungserscheinungen geführt, welche wohl geeignet ist, der gesammten Störungstheorie eine andere Gestalt zu geben. Dieser neuen Auffassung zu Folge sind es nicht mehr Ellipsen mit veränderlichen Elementen, in welchen sich die gestörten Körper bewegen. Es sind vielmehr unveränderliche, den Kepler'schen Gesetzen unterworfene Ellipsen, aus deren Ortsveränderung allein alle Störungserscheinungen erklärt werden sollen.

Eigenthümlicher Art sind die Integrationsschwierigkeiten, welche hier zu überwinden waren. Das Gravitationsgesetz, welches Newton aufgestellt hat, um die Bewegung der Himmelskörper zu erklären, war jederzeit für diejenigen, welchen es vergönnt war, sich über dessen Folgen ein Urtheil zu bilden, die Quelle einer mächtigen Anregung. Die Uebertragung des Gravitationsgesetzes auf die Erscheinung hat der Forschung eine Reihe schwieriger Fragen vorgelegt, deren Beantwortung sich derjenige Theil der Analysis vorbehält, welcher die Integration der Differentialgleichungen zur Aufgabe hat. Doch ist es eine Eigenthümlichkeit der reinen Analysis, so lange sie ihr Ziel nicht erreicht hat, dass sie es liebt, denjenigen Hilfsmitteln zu vertrauen, welche schon in einem andern Falle sich bewährt haben. Von solchem Standpunkte ausgehend haben die Analysten das Problem immer noch zu lösen gesucht, nachdem es den Astronomen längst gelungen war, indem sie nur die Erscheinung zur Richtschnur nahmen, die Bewegungen am Himmel auf einem eigenthümlichen Wege aus dem Gravitationsgesetze herzuleiten. Dieses grosse Ergebniss ist durch eine bewundernswerthe Summe von Arbeit in Beobachtungen und Rechnungen erzielt worden. Wenn nun dem ungeachtet die Methode, deren sich die Astronomen bedient haben, vor dem Urtheil der Analysten nicht die volle Würdigung finden konnte, wenn dieselbe den Forderungen der Analysis als nicht entsprechend befunden wurde, obwohl die Analysten ihrerseits nicht im Stande gewesen sind, jenen Erfolgen ein auch nur einigermaassen ebenbürtiges Resultat zur Seite zu stellen, so ist der Vermuthung Raum gegeben, dass der von denselben bis dahin eingenommene Standpunkt mit dem Erreichbaren ausser Verbindung stehe. Ich selbst habe geglaubt, es sei den Analysten die Aufgabe gestellt, die Methode der Astronomen sich zu eigen zu machen, um dieselbe mit den ihnen zu Gebote stehenden Hilfsmitteln möglichst zu vervollkommnen.

Was ich in dem Vorstehenden angedeutet habe, ist in den drei ersten Abschnitten dieser Schrift ausgeführt. Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit der Anwendung meiner Aufstellungen auf die Theorie des Mondes. Die Mondstörungen habe ich in dieser Schrift übrigens nur in ihren ersten Anfängen entwickelt, so weit nämlich als es mir nothwendig zu sein schien, damit der Fortgang der Rechnung nicht weiteren Schwierigkeiten und Unbestimmtheiten begegne. Die vollständige Entwicklung dieser Störungen auf Grund der neuen Theorie hoffe ich, werde es mir möglich sein, bald folgen zu lassen. Der fünfte und letzte Abschnitt ist noch der linearen Transformation der rechtwinkeligen Coordinaten gewidmet. Es gibt ein System von linearen Transformationen, welche von einem gewissen Standpunkte aus gesehen in dem Problem der drei Körper als gleichberechtigt erscheinen. Den Einfluss dieser Transformationen auf die Analysis verfolgend habe ich Anhaltspunkte gefunden, welche sich in der Lösung des Problems verwerthen lassen.

Meine Aufstellungen, wie wohl dieselben den rein analytischen Standpunkt festzuhalten beanspruchen, war ich überall bemüht, den Bedürfnissen der Astronomie nach Möglichkeit anzupassen. Vielleicht ist es mir auch gelungen, die zur leichten und sicheren Beurtheilung meiner Resultate erforderlichen oder doch irgendwie dienlichen Einzelnheiten genügend auszuführen. Ich habe dies dann vielfältig der freundlichen Mitwirkung des Herrn Schönfeld, Direktors der hiesigen Sternwarte, zu verdanken, welcher nicht ermüdete, da ich im Laufe der zwei letzten Jahre ihm gegenüber meine Aufstellungen zum Gegenstande eingehender Besprechungen machte, denselben eine vorurtheilsfreie Critik entgegenzustellen.

Mannheim, im November 1870.

A. Weller.

INHALT.

Erster Abschnitt.

Ueber die kanonische Form der Differentialgleichungen der Bewegung.

Zweiter Abschnitt.

Die gestörten Elemente in dem Problem der drei Körper.

Dritter Abschnitt.

Integration der Störungsglieder.

Vierter Abschnitt.

Entwicklung der Störungsgleichungen, und die ersten Näherungen der Elemente in der Theorie des Mondes.

Fünfter Abschnitt.

Variation der Focodistanz, und deren Anwendung auf die Theorie des Mondes.

Erster Abschnitt.

Ueber die kanonische Form der Differentialgleichungen der Bewegung.

§ 1. Die einfachste Form der linearen Transformation, welche zu einem kanonischen Systeme führt.

Der Hauptsache nach sind es bekannte Resultate, welche ich in dem vorliegenden Abschnitte zusammengestellt habe. Insofern es die Aufstellungen der Publication III betrifft, habe ich in einigen Einzelnheiten Aenderungen angebracht, welche sich in den unten folgenden Untersuchungen als zweckmässig erweisen.

Die beiden sich störenden Massen m und $m_,$ seien auf den Ort des Centralkörpers bezogen, dessen Masse der Einheit gleichgesetzt ist. Die rechtwinkeligen Coordinaten seien x_0, y_0, z_0 und $x_{0,}, y_{0,}, z_{0,}$. Die Differentialgleichungen der Bewegung sind:

1.
$$x_0'' = \left(\frac{1}{m} + 1\right)\frac{dU}{dx_0} + \frac{dU}{dx_{0,}} \qquad x_{0,}'' = \left(\frac{1}{m_,} + 1\right)\frac{dU}{dx_{0,}} + \frac{dU}{dx_0}$$
$$y_0'' = \left(\frac{1}{m} + 1\right)\frac{dU}{dy_0} + \frac{dU}{dy_{0,}} \qquad y_{0,}'' = \left(\frac{1}{m_,} + 1\right)\frac{dU}{dy_{0,}} + \frac{dU}{dy_0}$$
$$z_0'' = \left(\frac{1}{m} + 1\right)\frac{dU}{dz_0} + \frac{dU}{dz_{0,}} \qquad z_{0,}'' = \left(\frac{1}{m_,} + 1\right)\frac{dU}{dz_{0,}} + \frac{dU}{dz_0},$$

wo die Kräftefunktion

$$U = \frac{\varkappa m}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + \frac{\varkappa m m_,}{\sqrt{(x_{0,} - x_0)^2 + (y_{0,} - y_0)^2 + (z_{0,} - z_0)^2}} + \frac{\varkappa m_,}{\sqrt{x_{0,}^2 + y_{0,}^2 + z_{0,}^2}},$$

und $\varkappa$ eine positiv gedachte Beständige ist, welche einen bestimmten Werth erhält, sobald man die Einheit des Zeitmasses festgestellt hat, vgl. § 3, Pbl. III.

Es ist bekannt, dass man jene einfache Form wiederherstellen kann, durch welche sich die Differentialgleichungen der Bewegung auszeichnen, wenn nicht, wie hier, zwei Körper auf den Ort des dritten, sondern die drei Körper auf einen beliebigen, aber unbeweglich gedachten Punkt des Raumes bezogen sind. Man erreicht dies dadurch, dass man gewisse lineare Funktionen der Coordinaten als neue Veränderliche einführt. Die einfachste lineare Transformation, welche hierzu dienlich ist, ergibt sich, indem man den Nullpunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems nach dem gemeinsamen Schwerpunkte des Centralkörpers und der einen Masse m verlegt. Demgemäss schreibt man die neuen Coordinaten:

$$\xi_0 = \frac{x_0}{1+m} \qquad \xi_{0,} = x_{0,} - \frac{m x_0}{1+m}$$

$$\eta_0 = \frac{y_0}{1+m} \qquad \eta_{0,} = y_{0,} - \frac{m y_0}{1+m}$$

$$\zeta_0 = \frac{z_0}{1+m} \qquad \zeta_{0,} = z_{0,} - \frac{m z_0}{1+m}.$$

Die transformirten Differentialgleichungen haben die kanonische Form. Es ist:

$$\xi_0'' = \frac{1}{(1+m)m}\frac{dU}{d\xi_0} \qquad \xi_{0,}'' = \frac{1+m+m_,}{(1+m)m_,}\frac{dU}{d\xi_{0,}}$$

$$\eta_0'' = \frac{1}{(1+m)m}\frac{dU}{d\eta_0} \qquad \eta_{0,}'' = \frac{1+m+m_,}{(1+m)m_,}\frac{dU}{d\eta_{0,}}$$

$$\zeta_0'' = \frac{1}{(1+m)m}\frac{dU}{d\zeta_0} \qquad \zeta_{0,}'' = \frac{1+m+m_,}{(1+m)m_,}\frac{dU}{d\zeta_{0,}}.$$

Die in der Richtung der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen auf die bewegte Masse einwirkenden Kräfte sind diesen Gleichungen zufolge gleich den partiellen Differentialquotienten der Kräftefunktion nach eben diesen Coordinaten, abgesehen von einem der Kräftefunktion beizufügenden beständigen Factor.

Eine einfachere Schreibweise der Rechnungen wird dadurch ermöglicht, dass man die von m und $m_,$ abhängigen Coefficienten der Kräftefunktion durch eine weitere Transformation beseitigt. Ich setze desshalb:

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{1}{(1+m)m}}\,\xi \qquad \xi_{0,} = \sqrt{\frac{1+m+m_,}{(1+m)m_,}}\,\xi_,$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{1}{(1+m)m}}\,\eta \qquad \eta_{0,} = \sqrt{\frac{1+m+m_,}{(1+m)m_,}}\,\eta_,$$

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{(1+m)m}}\,\zeta \qquad \zeta_{0,} = \sqrt{\frac{1+m+m_,}{(1+m)m_,}}\,\zeta_,.$$

Es versteht sich, dass die neuen Coordinaten $\xi\ \eta\ \zeta$ und $\xi_,\ \eta_,\ \zeta_,$ nicht mehr die Abstände der beiden bewegten Massen von den drei Coordinatenebenen sind. Es sind durch diese Coordinaten die Abstände zweier anderen Punkte ausgedrückt, welche nur dies mit den Massenpunkten gemein haben, dass sie in der Richtung der betreffenden Leitstrahlen liegen.

Die ursprünglichen Coordinaten, durch welche die beiden bewegten Massen auf den Ort des Centralkörpers bezogen sind, lassen sich nun aus den folgenden Gleichungen berechnen:

2.

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,x_0 = \xi \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\,x_{0,} = \xi_,\cos\mu_0 + \xi\sin\mu_0$$

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,y_0 = \eta \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\,y_{0,} = \eta_,\cos\mu_0 + \eta\sin\mu_0$$

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,z_0 = \zeta \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\,z_{0,} = \zeta_,\cos\mu_0 + \zeta\sin\mu_0,$$

wo μ_0 eine bestimmte Funktion der Massen m und $m_,$ ist. Man findet:

$$\sin\mu_0 = \sqrt{\frac{m\,m_,}{(1+m)(1+m_,)}} \qquad \cos\mu_0 = \sqrt{\frac{1+m+m_,}{(1+m)(1+m_,)}}.$$

Man erhält aber das kanonische System:

$$\xi'' = \frac{dU}{d\xi} \qquad \xi_,'' = \frac{dU}{d\xi_,}$$

3. $$\eta'' = \frac{dU}{d\eta} \qquad \eta_,'' = \frac{dU}{d\eta_,}$$

$$\zeta'' = \frac{dU}{d\zeta} \qquad \zeta_,'' = \frac{dU}{d\zeta_,},$$

welches dadurch ausgezeichnet ist, dass alle von den Massenverhältnissen abhängigen Coefficienten in die Kräftefunktion hineingezogen sind.

§ 2. Die lineare Transformation des kanonischen Systems als Funktion einer willkürlichen Beständigen.

Zu dem soeben aufgestellten kanonischen Systeme gelangt man auch vermittelst einer anderen linearen Transformation, welche allgemeiner ist, als die obige, weil sie eine willkürliche Beständige enthält. Setzt man nämlich:

$$\xi = x\cos\varepsilon + x_,\sin\varepsilon \qquad \xi_, = x_,\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon$$

4. $$\eta = y\cos\varepsilon + y_,\sin\varepsilon \qquad \eta_, = y_,\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon$$

$$\zeta = z\cos\varepsilon + z_,\sin\varepsilon \qquad \zeta_, = z_,\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon,$$

wo ε eine willkürliche Beständige ist, so hat man auch wieder die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$x'' = \frac{dU}{dx} \qquad x_,'' = \frac{dU}{dx_,}$$

5. $$y'' = \frac{dU}{dy} \qquad y_,'' = \frac{dU}{dy_,}$$

$$z'' = \frac{dU}{dz} \qquad z_,'' = \frac{dU}{dz_,}.$$

Die ursprünglichen Coordinaten, durch welche die beiden bewegten Massen auf den Ort des Centralkörpers bezogen sind, bestimmen sich dann aus den folgenden Gleichungen:

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,x_0 = x\cos\varepsilon + x_,\sin\varepsilon \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\,x_{0,} = x_,\cos(\mu_0-\varepsilon) + x\sin(\mu_0-\varepsilon)$$

6. $$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,y_0 = y\cos\varepsilon + y_,\sin\varepsilon \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\,y_{0,} = y_,\cos(\mu_0-\varepsilon) + y\sin(\mu_0-\varepsilon)$$

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,z_0 = z\cos\varepsilon + z_,\sin\varepsilon \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\,z_{0,} = z_,\cos(\mu_0-\varepsilon) + z\sin(\mu_0-\varepsilon),$$

Um auch die Kräftefunktion in diesem Sinne zu transformiren, schreibt man ohne Weiteres die beiden Gleichungen:

$$\frac{m}{1+m}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = r^2\cos^2\varepsilon + 2rr_,\,s\cos\varepsilon\sin\varepsilon + r_,^2\sin^2\varepsilon$$

$$\frac{m_,}{1+m_,}(x_{0,}^2 + y_{0,}^2 + z_{0,}^2) = r_,^2\cos^2(\mu_0-\varepsilon) + 2rr_,\,s\cos(\mu_0-\varepsilon)\sin(\mu_0-\varepsilon) + r^2\sin^2(\mu_0-\varepsilon),$$

wo man abkürzend gesetzt hat:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad r_,^2 = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2 \qquad rr_, s = xx_, + yy_, + zz_, .$$

Aus den Coordinatenwerthen 6. findet man:

$$\sqrt{\frac{m\,m_,}{m + m_,}}\,(x_a - x_0) = x_, \cos(\mu + \varepsilon) - x \sin(\mu + \varepsilon)$$

$$\sqrt{\frac{m\,m_,}{m + m_,}}\,(y_a - y_0) = y_, \cos(\mu + \varepsilon) - y \sin(\mu + \varepsilon)$$

$$\sqrt{\frac{m\,m_,}{m + m_,}}\,(z_a - z_0) = z_, \cos(\mu + \varepsilon) - z \sin(\mu + \varepsilon)\,,$$

nachdem man den Winkel μ durch die folgenden Gleichungen bestimmt hat:

$$\sin\mu = \sqrt{\frac{m_,}{(1 + m)(m + m_,)}}\,, \qquad \cos\mu = \sqrt{\frac{(1 + m + m_,)\,m}{(1 + m)(m + m_,)}}\,.$$

Zum Behufe der weiteren Transformation der Kräftefunktion erhält man aus Vorliegendem noch die Gleichung:

$$\frac{mm_,}{m + m_,}\Big((x_a - x_0)^2 + (y_a - y_0)^2 + (z_a - z_0)^2\Big) = r_,^2 \cos^2(\mu + \varepsilon) - 2\,r_, rs \cos(\mu + \varepsilon)\,\sin(\mu + \varepsilon) + r^2 \sin^2(\mu + \varepsilon).$$

In dieser Form der Kräftefunktion nehmen die Massen m und $m_,$ eine nicht symmetrische Stellung ein. Setzt man abkürzend $\mu_0 - \varepsilon = \varepsilon_,$, so ist $\mu + \varepsilon = \mu + \mu_0 - \varepsilon_,$. Schreibt man ferner $\mu + \mu_0 = 90^0 - \mu_,$, so ist $\mu + \varepsilon = 90^0 - (\mu_, + \varepsilon_,)$. Daraus folgt, dass die vorstehenden Ausdrücke in andere übergehen, zu welchen man vermittelst der Gleichungen 4. unmittelbar gelangen würde, wenn man im vorigen § den Nullpunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems nach dem gemeinsamen Schwerpunkte des Centralkörpers und der Masse $m_,$ verlegen wollte. Zur Bestimmung von $\mu_,$ findet man die Gleichungen:

$$\sin\mu_, = \sqrt{\frac{m}{(1 + m_,)(m + m_,)}} \qquad \cos\mu_, = \sqrt{\frac{(1 + m + m_,)\,m_,}{(1 + m_,)(m + m_,)}}\,.$$

Eine weitere Beziehung zwischen den drei Winkeln $\mu_0\,\mu\,\mu_,$ neben der obigen $\mu_, + \mu + \mu_0 = 90^0$ ist sehr einfach ausgedrückt durch die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\mu_0 = m \operatorname{tg}\mu = m_, \operatorname{tg}\mu_, .$$

Man kann leicht die neuen Veränderlichen der allgemeinen linearen Transformation 6. in eine einfache Beziehung zu rechtwinkeligen Coordinaten der beiden gestörten Massen bringen, indem man sich den Nullpunkt der Coordinaten von dem Ort des Centralkörpers weg nach einem anderen Punkte des Raumes verlegt denkt. Aus der Form der linearen Gleichungen folgt, dass dieser Punkt jedenfalls in der Ebene der drei Körper liegt. Für $\varepsilon = 0$ fällt derselbe, wie man oben gesehen hat, mit dem gemeinsamen Schwerpunkte des Centralkörpers und der Masse m zusammen. Setzt man $\varepsilon = \mu_0$, so fällt derselbe mit dem gemeinsamen Schwerpunkte des Centralkörpers und der Masse $m_,$ zusammen. Im Allgemeinen liegt der Nullpunkt des neuen Coordinatensystems auf einer Curve, welche in der Ebene der drei Körper verzeichnet

durch die beiden soeben erwähnten Schwerpunkte geht. Es ist leicht, die Coordinaten des neuen Nullpunktes anzugeben, bezogen auf den Ort des Centralkörpers. Dieselben können als lineare Funktionen der gleichnamigen neuen Coordinaten aufgefasst werden, und schreiben sich in der Form:

$$X = x_{,} \sqrt{\frac{1+m}{m}} \sin \varepsilon + x \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}} \sin (\mu_0 - \varepsilon)$$

$$Y = y_{,} \sqrt{\frac{1+m}{m}} \sin \varepsilon + y \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}} \sin (\mu_0 - \varepsilon)$$

$$Z = z_{,} \sqrt{\frac{1+m}{m}} \sin \varepsilon + z \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}} \sin (\mu_0 - \varepsilon) .$$

Durch die Elimination der willkürlichen Beständigen ε erhält man die Gleichungen der erwähnten Curve, deren Gestalt selbstverständlich von dem jedesmaligen Orte der beiden sich störenden Körper abhängig ist.

Die Coordinaten der beiden sich störenden Körper, bezogen auf den Ort des Centralkörpers, können aber in folgender Form angeschrieben werden:

$$x_0 = x \sqrt{\frac{m+m_{,}}{m m_{,}}} \sin (\mu + \varepsilon) + X \qquad x_{0,} = x_{,} \sqrt{\frac{m+m_{,}}{m m_{,}}} \cos (\mu + \varepsilon) + X$$

$$y_0 = y \sqrt{\frac{m+m_{,}}{m m_{,}}} \sin (\mu + \varepsilon) + Y \qquad y_{0,} = y_{,} \sqrt{\frac{m+m_{,}}{m m_{,}}} \cos (\mu + \varepsilon) + Y$$

$$z_0 = z \sqrt{\frac{m+m_{,}}{m m_{,}}} \sin (\mu + \varepsilon) + Z \qquad z_{0,} = z_{,} \sqrt{\frac{m+m_{,}}{m m_{,}}} \cos (\mu + \varepsilon) + Z .$$

Hieraus ist die Beziehung der neuen Veränderlichen zu den rechtwinkeligen Coordinaten der beiden gestörten Massen in Bezug auf den neuen Nullpunkt ersichtlich.

Die Gesammtbewegung des gestörten Körpers lässt sich indessen vortheilhafter übersehen, wenn dieselbe auf den Ort des Centralkörpers bezogen gedacht wird, in welchem Falle sie aus zwei verschiedenen Bewegungen zusammengesetzt erscheint, vgl. § 5, Pbl. III. Die Gesammtbewegung ist hiernach in einer Curve dargestellt, deren Nullpunkt, in der Ebene der drei Körper fortschreitend, um den Centralkörper herum selbst eine Curve beschreibt. Wenn der Leitstrahl derjenigen Curve, welche die Masse m beschreibt, durch $\sqrt{\frac{1+m}{m}}\, r \cos \varepsilon$ ausgedrückt sein soll, so ist $\sqrt{\frac{1+m}{m}}\, r_{,} \sin \varepsilon$ die jedesmalige Entfernung des Nullpunktes von dem Centralkörper. In ähnlicher Weise beschreibt die andere Masse $m_{,}$ eine Curve, deren Leitstrahl $\sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}}\, r_{,} \cos (\mu_0 - \varepsilon)$ ist, während der Nullpunkt den Abstand $\sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}}\, r \sin (\mu_0 - \varepsilon)$ von dem Centralkörper hat.

Die Leitstrahlen der beiden Massenpunkte einerseits, und die Leitstrahlen der entsprechenden Nullpunkte anderseits, welche selbstverständlich alle vier in der Ebene der drei Körper enthalten sind, zeigen einige merkwürdige Beziehungen zu einander. Der Leitstrahl des ersten Nullpunkts ist jederzeit parallel dem Leitstrahl des zweiten Massenpunktes, und es steht derselbe in Bezug auf seine Länge in einem beständigen Verhältnisse zu dem andern. Ebenso ist auch der Leitstrahl des zweiten Nullpunktes parallel dem Leitstrahl des ersten Massenpunktes, und es stehen deren Längen in einem beständigen Verhältnisse

zu einander. Die Leitstrahlen der beiden Massenpunkte schneiden sich in einem der Ebene der drei Körper angehörigen Punkte. Dieser Punkt fällt mit demjenigen zusammen, welcher sich vorbin als gemeinsamer Nullpunkt der neuen Coordinaten ergeben hat, und dessen Coordinaten, bezogen auf den Ort des Centralkörpers, mit $X\ Y\ Z$ bezeichnet worden sind.

Die Lösung des Problems der drei Körper ist bekanntlich für alle in dem Planetensysteme vorkommenden Fälle dadurch zu Stande gekommen, dass man die kleinen Verrückungen bestimmt hat, welche jeder der beiden sich störenden Körper in einer elliptischen um den Centralkörper beschriebenen Bahn erleidet. Obschon obiges ε eine Beständige ist, welche ganz beliebig angenommen werden kann, so versteht es sich doch, dass eine Lösung des Problems in der gedachten Weise bei der Wahl von ε gewisse Grenzbedingungen voraussetzt. Es muss ε so gewählt sein, dass die Coordinaten $x\ y\ z\ x_,\ y_,\ z_,$ immer nur kleine Abweichungen von den entsprechenden Coordinaten zweier um den Centralkörper beschriebenen Ellipsen zeigen, und es muss in Folge dessen ε als ein kleiner Bruchwerth gedacht werden.

Die lineare Transformation in ihrer Eigenschaft als Funktion einer willkürlichen Beständigen ist Gegenstand einer Untersuchung in § 18 Pbl. III. Es sind dort die linearen Gleichungen aufgestellt:

$$x_0 = x + l_, x_, \qquad x_{00} = x_, + l x,$$

wo $l_,$ und l die folgenden Werthe haben:

$$l_, = \frac{m_,}{1 + m_,} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \cos\mu_0} \qquad l = \frac{m}{1 + m} \frac{1}{1 + \varepsilon\cos\mu_0}.$$

Vertauscht man hier ε gegen $\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\mu_0 - \varepsilon)}$, in Folge dessen $\varepsilon + \cos\mu_0$ gegen $\frac{\sin\mu_0 \cos(\mu_0 - \varepsilon)}{\sin(\mu_0 - \varepsilon)}$

und $1 + \varepsilon\cos\mu_0$ gegen $\frac{\sin\mu_0 \cos\varepsilon}{\sin(\mu_0 - \varepsilon)}$,

so folgt daraus:

$$l_, = \frac{m_,}{1 + m_,} \frac{\sin\varepsilon}{\sin\mu_0 \cos(\mu_0 - \varepsilon)}, \qquad l = \frac{m}{1 + m} \frac{\sin(\mu_0 - \varepsilon)}{\sin\mu_0 \cos\varepsilon};$$

und die obigen Coordinatenwerthe gehen über in:

$$x_0 = x + x_, \sqrt{\frac{(1 + m)\, m_,}{(1 + m_,)\, m}} \frac{\sin\varepsilon}{\cos(\mu_0 - \varepsilon)} \qquad x_{00} = x_, + x \sqrt{\frac{(1 + m_,)\, m}{(1 + m)\, m_,}} \frac{\sin(\mu_0 - \varepsilon)}{\cos\mu_0}.$$

Vertauscht man noch x gegen $x \sqrt{\frac{1 + m}{m}} \cos\varepsilon$ und $x_,$ gegen $x_, \sqrt{\frac{1 + m_,}{m_,}} \cos(\mu_0 - \varepsilon)$, so erhält die lineare Transformation jene einfache Darstellung:

$$\sqrt{\frac{m}{1 + m}}\, x_0 = x\cos\varepsilon + x_, \sin\varepsilon \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1 + m_,}}\, x_{00} = x_, \cos(\mu_0 - \varepsilon) + x \sin(\mu_0 - \varepsilon),$$

deren ich mich im Obigen bedient habe. Diese Umwandlung hat schon vor mir Herr *Radau* veröffentlicht (Comptes rendus, 20. Juli 1868).

§ 3. Feststellung der Polarcoordinaten.

Vermittelst der linearen Transformation ist die Bewegung der beiden sich störenden Körper um den Centralkörper auf zwei andere Bewegungen zurückgeführt, und bestimmen sich die neuen Bewegungen durch das kanonische System 5.:

$$x'' = \frac{dU}{dx} \qquad x_{,}'' = \frac{dU}{dx_{,}}$$

$$y'' = \frac{dU}{dy} \qquad y_{,}'' = \frac{dU}{dy_{,}}$$

$$z'' = \frac{dU}{dz} \qquad z_{,}'' = \frac{dU}{dz_{,}}.$$

Um dasselbe zu integriren, führt man Polarcoordinaten ein. Wegen der Symmetrie der Differentialgleichungen in der einen und in der anderen Bewegung, ist es hinreichend, diese Rechnung nur für die eine Bewegung auszuführen. Man denke sich eine Ebene durch den Leitstrahl gelegt, also durch diejenige Gerade, welche den Ort des bewegten Massenpunktes mit dem Nullpunkte der rechtwinkeligen Coordinaten verbindet. Es sei i der Winkel, unter welchem dieselbe gegen die xy Ebene geneigt ist, und ϑ derjenige Winkel, welchen deren Durchschnitt mit der xy Ebene, oder die Knotenlinie, mit der x Achse bildet. Der Leitstrahl sei mit r, und der Winkel zwischen Leitstrahl und Knotenlinie, das Argument der Breite, mit u bezeichnet. Man schreibt dann die Gleichungen:

7.
$$x = r(\cos\vartheta\cos u - \cos i\sin\vartheta\sin u)$$
$$y = r(\sin\vartheta\cos u + \cos i\cos\vartheta\sin u)$$
$$z = r\sin i\sin u\ .$$

Der Winkel i ist auf beiden Seiten der xy Ebene zwischen $\pm 90^0$ gemessen; und die Richtung betreffend, in welcher der Winkel ϑ gemessen werden soll, ist durch die vorliegenden Gleichungen die Bestimmung getroffen, dass für $i = o$ der Leitstrahl mit der x Achse den Winkel $\vartheta + u$ bilde.

Indem man bemerkt, dass die Quotienten $\frac{x}{r}\ \frac{y}{r}\ \frac{z}{r}$ nichts anders sind, als die cosinus der Winkel, welche der Leitstrahl mit den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen bildet, kann man leicht einige sphärische Dreiecke angeben, aus welchen sich die Gleichungen 7. herleiten. Die Strahlen der Kugel, welche nach den drei Ecken des sphärischen Dreiecks gezogen werden, sind durch den Leitstrahl, die Knotenlinie und eine der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen ihrer Richtung nach bestimmt.

Die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes sind dessen Abstände von drei im Nullpunkte senkrecht sich schneidenden Ebenen. Die Polarcoordinaten nehmen auf nur zwei Ebenen Bezug. Die eine von beiden fällt mit der Ebene der xy zusammen und kann die Ebene des Pols genannt werden; die andere, welche durch den Leitstrahl gelegt ist, enthält ausser diesem auch den Winkel u, und soll desshalb vorzugsweise die Ebene der Polarcoordinaten heissen.

Für den Fall, dass die Bahn des Massenpunktes eine ungestörte Ellipse ist, ergeben sich die Winkel ϑ und i als beständige Grössen, und u bestimmt sich aus der Gleichung $u' = \frac{n}{r^2}$, wo n gleichfalls eine Beständige ist, welche positiv gedacht werden muss, weil der Winkel u mit der Zeit wachsen soll. Durch die Differentiation der beiden aus 7. hergeleiteten Gleichungen:

$$8. \quad \begin{aligned} \frac{\sin \vartheta}{\sin i} \cot u + \cot i \cos \vartheta &= \frac{y}{z} \\ \frac{\cos \vartheta}{\sin i} \cot u - \cot i \sin \vartheta &= \frac{x}{z} \end{aligned}$$

erhält man für eben diesen Fall, dass ϑ und i beständige Grössen sind, die beiden:

$$9. \quad \begin{aligned} n \sin i \sin \vartheta &= yz' - zy' \\ n \sin i \cos \vartheta &= xz' - zx' \,. \end{aligned}$$

In dem Problem der drei Körper hat man die Winkel ϑ und i als Veränderliche zu betrachten. Doch kann man auch hier die vorstehenden Gleichungen 9. In Verbindung mit den Gleichungen 8. beibehalten, indem man neben ϑ und i noch die beiden Grössen n und u als Veränderliche voraussetzt, und die vier Gleichungen zur Bestimmung dieser Veränderlichen verwendet. Es versteht sich, dass dann aber die obige Gleichung zur Bestimmung von u, nämlich $u' = \frac{n}{r^2}$ nicht fortbesteht.

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Gleichungen 9. auch durch die folgenden drei ersetzt werden können:

$$\left(\frac{x}{r}\right)' = \left(\frac{x}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} \qquad \left(\frac{y}{r}\right)' = \left(\frac{y}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} \qquad \left(\frac{z}{r}\right)' = \left(\frac{z}{r}\right)_u \frac{n}{r^2},$$

worin das einer Veränderlichen rechts unten beigesetzte u anzeigt, dass der partielle Differentialquotient dieser Veränderlichen nach u genommen ist. Von diesen drei Gleichungen sind nur zwei unter sich wesentlich verschieden. Die dritte ist eine Folge der beiden andern, mit Rücksicht auf die beiden identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' &= o \\ \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_u + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_u + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)_u &= o \,. \end{aligned}$$

Wenn sich hiernach die ersten Derivirten der drei Quotienten $\frac{x}{r}\,\frac{y}{r}\,\frac{z}{r}$ in dem Problem der drei Körper nicht anders gestalten, als es unter der Annahme beständiger Elemente i und ϑ geschehen würde, so gilt dies auch für die ersten Derivirten der Quotienten $\frac{y}{z}$ und $\frac{x}{z}$. Dies ist aber diejenige Annahme, welche vorhin zu den Gleichungen 9. geführt hat. Die vorstehende Umwandlung dieser Gleichungen bietet den Vortheil, dass man mit deren Hilfe sehr leicht die Derivirten aller derjenigen Grössen herstellt, welche sich als Funktion der drei Quotienten $\frac{x}{r}\,\frac{y}{r}\,\frac{z}{r}$ auffassen lassen.

Der Leitstrahl, indem er den bewegten Körper mit dem Nullpunkte der Coordinaten verbindet, beschreibt eine Kegelfläche, in welcher die Bahn des Körpers verzeichnet ist. Man kann sich die Bahn des gestörten Körpers übrigens auch in einer beweglichen Ebene verzeichnet denken, deren Lage durch den Leitstrahl und die Tangente der Bahn bestimmt ist, und welche desshalb als die Berührungsebene jener Kegelfläche aufgefasst werden muss. Indem man auf diese Ebene Bezug nimmt, kann man jener Forderung, wonach sich die ersten Derivirten der Quotienten $\frac{x}{r}\,\frac{y}{r}\,\frac{z}{r}$ ganz ebenso gestalten sollen, wie es für den Fall beständiger Winkel i und ϑ geschehen würde, leicht einen geometrischen Ausdruck geben.

Diese Quotienten bezeichnen die cosinus der Winkel, welche der Leitstrahl mit den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen bildet. Es sollen sich also die kleinen Aenderungen, welche diese Winkel in einem verschwindenden Zeittheile erleiden, daraus erklären, dass der Leitstrahl in einer unbeweglichen Ebene fortschreitet. Man bemerke, dass die Ebene der Bahn, wiewohl selbst beweglich, ihre Lage doch nicht ändert, während der Massenpunkt eine verschwindende Strecke in derselben zurücklegt. Daraus ist zu ersehen, dass sich die Bedingungen, welche in den Gleichungen 9. ausgesprochen sind, erfüllen, sobald die Ebene der Polarcoordinaten, deren Lage durch die Winkel ϑ und i bestimmt worden ist, mit der Ebene der Bahn zusammenfällt. Es ist dann selbstverständlich auch die Ebene der Bahn durch jene Winkel ϑ und i ihrer Lage nach bestimmt.

Es ist noch ferner zu bemerken, dass die Bewegung der Ebene der Bahn jederzeit in einer Drehung um den Leitstrahl besteht. Daraus folgt, dass unter der obigen Voraussetzung auch die Aenderungen der beiden Winkel ϑ und i für die Zeit dt aus der Drehung der Ebene der Polarcoordinaten um den jedesmaligen Leitstrahl erklärt werden können, vgl. § 11, Pbl. III.

§ 4. Die vier endlichen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung.

Differentiirt man die Gleichungen 9. des § 3, so erhält man mit Rücksicht auf das System der Gleichungen 5. die folgenden:

$$(n \sin i \sin \vartheta)' = y \frac{dU}{dz} - z \frac{dU}{dy}$$

$$(n \sin i \cos \vartheta)' = x \frac{dU}{dz} - z \frac{dU}{dx}.$$

Indem man sich die Kräftefunktion als Funktion der Polarcoordinaten r $r_,$ s denkt, gehen diese Gleichungen über in:

10. $$(n \sin i \sin \vartheta)' = \frac{yz_, - zy_,}{rr_,} \frac{dU}{ds}$$

$$(n \sin i \cos \vartheta)' = \frac{xz_, - zx_,}{rr_,} \frac{dU}{ds}.$$

Durch die Elimination von ϑ' lässt sich aus denselben eine dritte ähnliche Gleichung herleiten. Man kann auch, um dazu schneller zu gelangen, von den Gleichungen 9. ausgehend, die Derivirte z' eliminiren. Man erhält zunächst:

$$n \cos i = x y' - y x'.$$

Durch die Differentiation findet man alsdann ebenso, wie die beiden vorhin angestellten, die dritte Gleichung:

10. $$(n \cos i)' = \frac{xy_, - yx_,}{rr_,} \frac{dU}{ds}.$$

Nachdem man die drei unter 10. gegebenen Differentialgleichungen einzeln genommen zu den entsprechenden Differentialgleichungen der andern Bahn addirt hat, findet man durch Integration die drei Flächenintegrale:

11. $$\begin{aligned} n \sin i \sin \vartheta + n_{,} \sin i_{,} \sin \vartheta_{,} &= c_2 \\ n \sin i \cos \vartheta + n_{,} \sin i_{,} \cos \vartheta_{,} &= c_1 \\ n \cos i + n_{,} \cos i_{,} &= c. \end{aligned}$$

Man kann dem Coordinatensystem durch Drehungen um den Nullpunkt eine solche Lage geben, dass die Integrationsbeständigen c_2 und c_1 verschwinden. Die beiden ersten Flächenintegrale schreiben sich dann einfacher:

$$\vartheta = \vartheta_{,}$$
$$n \sin i + n_{,} \sin i_{,} = o\,.$$

Aus der ersten folgt, dass die beiden Bahnen jederzeit einen gemeinsamen Knoten haben, oder dass der gemeinsame Durchschnitt der beiden Bahnebenen in der Ebene des Pols fortschreitet. Aus der zweiten Gleichung ersieht man, da n und $n_{,}$ als positive Werthe gedacht werden, dass die Winkel i und $i_{,}$ entgegengesetzte Zeichen führen.

Mit Hilfe der beiden letzten Flächenintegrale kann man zwei von den vier Grössen $n\ n_{,}\ i\ i_{,}$ bestimmen, wenn die zwei andern bekannt sind. Der Abbängigkeit, welche in diesen beiden Flächenintegralen ausgesprochen ist, lässt sich leicht eine geometrische Auslegung geben. Denkt man sich $i > o$ und $i_{,} < o$, so bezeichnen $n_{,}$, n und c die drei Seiten eines ebenen Dreiecks, welchen beziehungsweise die Winkel i, $-i_{,}$ und $180^0 - (i - i_{,})$ gegenüberstehen. In Folge dessen lassen sich diese beiden Flächenintegrale denn auch in den folgenden symmetrisch gebildeten Gleichungen anschreiben:

$$n_{,} \sin (i - i_{,}) = c \sin i$$
$$n \ \sin (i_{,} - i) = c \sin i_{,}\,.$$

Man hat oben bei der Transformation der Störungsfunktion die Veränderliche s eingeführt. Es ist:

$$r r_{,} s = x x_{,} + y y_{,} + z z_{,}\,.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung $\vartheta = \vartheta_{,}$ erhält man durch die Einführung der Coordinatenwerthe 7. den Werth:

12. $$s = \cos u \cos u_{,} + \cos (i - i_{,}) \sin u \sin u_{,}\,.$$

Man findet diesen Werth s auch vermittelst eines sphärischen Dreiecks. Dasselbe entspricht einer körperlichen Ecke, welche die Ebenen der beiden Bahnen mit der Ebene der drei Körper bilden. Bezeichnet man mit w den Winkel, welchen die beiden Leitstrahlen miteinander bilden, so sind die drei Seiten des sphärischen Dreiecks w, u und $u_{,}$, und der der Seite w gegenüberstehende Winkel, durch welchen die Neigung der beiden ersten Ebenen zu einander gemessen wird, ist $J = i - i_{,}$. Da nun $s = \cos w$ ist, so hat man wieder den schon oben gefundenen Werth:

$$s = \cos u \cos u_{,} + \cos J \sin u \sin u_{,}\,.$$

Man kommt öfters in den Fall, von den Beziehungen Gebrauch zu machen, welche zwischen der Grösse s und den Derivirten $\frac{ds}{du}$ und $\frac{ds}{du_{,}}$ bestehen. Diese Beziehungen hier aufzustellen, dazu gibt mir das soeben betrachtete sphärische Dreieck Veranlassung. Es seien k und $k_{,}$ die Winkel, welche die Ebenen der beiden Bahnen mit der Ebene der drei Körper bilden. Man hat dann die bekannten Gleichungen:

$$\sin w \cos k = \sin u \cos u_{,} - \cos J \cos u \sin u_{,}$$
$$\sin w \cos k_{,} = \sin u_{,} \cos u - \cos J \cos u_{,} \sin u\,.$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$\sin w \cos k = -\frac{ds}{du} \qquad \sin w \cos k_{,} = -\frac{ds}{du_{,}}.$$

Das sphärische Dreieck liefert ferner die Gleichungen:

$$\sin w \sin k = \sin J \sin u_{,} \qquad \sin w \sin k_{,} = \sin J \sin u\,.$$

Durch die Elimination von k und $k_{,}$ ergeben sich zwei der erwähnten Beziehungen:

13. $$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \sin^2 J \sin^2 u_{,} = 1 - s^2$$
$$\left(\frac{ds}{du_{,}}\right)^2 + \sin^2 J \sin^2 u = 1 - s^2\,.$$

Aus dem sphärischen Dreiecke folgt auch:

$$\cos J + \cos k \cos k_{,} = \cos w \sin k \sin k_{,}\,.$$

Durch die Elimination von k und $k_{,}$ entsteht eine dritte Beziehung:

14. $$\frac{ds}{du}\frac{ds}{du_{,}} + (1 - s^2)\cos J = s \sin^2 J \sin u \sin u_{,}\,.$$

Zur Erledigung der in diesem § gestellten Aufgabe bedarf es noch des Integrals der lebendigen Kraft. Eine Integration des Systems der Gleichungen 5. gibt unmittelbar:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + x_{,}'^2 + y_{,}'^2 + z_{,}'^2 = 2U - a\,.$$

Durch die Einführung der Polarcoordinaten wird dasselbe übergeführt in:

15. $$r'^2 + r_{,}'^2 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_{,}^2}{r_{,}^2} = 2U - a.$$

§ 5. Die Differentialgleichungen der Bewegung in Polarcoordinaten ausgedrückt.

Differentiirt man die Gleichungen 8.:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin i}\cot u + \cot i \cos \vartheta = \frac{y}{z}$$
$$\frac{\cos \vartheta}{\sin i}\cot u - \cot i \sin \vartheta = \frac{x}{z}$$

unter der Annahme, dass ϑ und i veränderliche Grössen seien, so ergeben sich, nachdem man die Derivirten x' y' z' mittels der Gleichungen 9. eliminirt hat, die beiden Differentialgleichungen:

16. $$u' + \cos i\,\vartheta' = \frac{n}{r^2} \qquad i' = \sin i \cot u\,\vartheta'.$$

Die Derivirten u' und i' sind hierdurch bestimmt, nachdem man den Werth der Derivirten ϑ' eingesetzt hat.

Unter dem Beistande der letzteren Gleichung 16. lassen sich die Derivirten ϑ' und u' aus den beiden Gleichungen 10.

$$(n \sin i \sin\vartheta)' = \frac{yz_, - zy_,}{rr_,} \frac{dU}{ds}$$

$$(n \sin i \cos\vartheta)' = \frac{xz_, - zx_,}{rr_,} \frac{dU}{ds}$$

herleiten. Man findet leicht die beiden Werthe:

17. $$\vartheta' = -\frac{c}{nn_,} \sin u \sin u_, \frac{dU}{ds}, \qquad u' = \frac{ds}{du}\frac{dU}{ds}.$$

Aus den drei Gleichungen 7. des § 3 sind die beiden Gleichungen 8. hergeleitet worden. Es ergibt sich aus den erstgenannten noch die dritte Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Durch zweimaliges Differentiiren entsteht:

$$rr'' + r'^2 = xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

was mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + \frac{n^2}{r^2},$$

und auf das System der Gleichungen 5. übergeht in:

$$rr'' = \frac{n^2}{r^2} + x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} + z\frac{dU}{dz}.$$

Fasst man U wieder als Funktion von r $r_,$ s auf, so entsteht die einfachere Gleichung:

18. $$rr'' = \frac{n^2}{r^2} + r\frac{dU}{dr},$$

aus welcher der Leitstrahl r zu bestimmen ist.

Indem man sich der Polarcoordinaten bedient, führt man drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter 5. in die vier Differentialgleichungen erster Ordnung 16. und 17. über, und in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung unter 18. Im Ganzen kann man jetzt zur Bestimmung der von der Masse m beschriebenen Bahn die folgenden Gleichungen anschreiben:

I. $$u' = \frac{ds}{du}\frac{dU}{ds}$$

II. $$rr'' = \frac{n^2}{r^2} + r\frac{dU}{dr}$$

III. $$u' + \cos i\, \vartheta' = \frac{n}{r^2}$$

IV. $$\frac{i'}{\sin i} = -\frac{c \cos u \sin u_,}{n n_,} \frac{dU}{ds}$$

V. $$\vartheta' = -\frac{c \sin u \sin u_,}{n n_,} \frac{dU}{ds}.$$

Die willkürliche Beständige ε kommt nur in der Kräftefunktion vor. Abgesehen von der abweichenden Ausdrucksweise der in dem vorliegenden Systeme vorkommenden beständigen Coefficienten ist dasselbe genau übereinstimmend mit demjenigen, welches ich in den §§ 11 und 12, Pbl. III aufgestellt habe.

Zur Bestimmung der von der Masse $m_,$ beschriebenen Bahn hat man fünf ähnliche Gleichungen. Da aber vier Integrale des Problems bekannt sind, so bleibt anstatt des Systems der zwölften Ordnung ein System Differentialgleichungen der achten Ordnung zu integriren. Mit Rücksicht auf das Flächenintegral $\vartheta = \vartheta_,$ fällt die der Gleichung V. entsprechende der anderen Bahn weg. Man schreibt desshalb nur die vier Gleichungen:

I.' $$n_,' = \frac{ds}{du_,} \frac{dU}{ds}$$

II.' $$r_, r_,'' = \frac{n_,^2}{r_,^2} + r_, \frac{dU}{dr_,}$$

III.' $$u_,' + \cos i_,\, \vartheta' = \frac{n_,}{r_,^2}$$

IV.' $$\frac{i_,'}{\sin i_,} = -\frac{c \cos u_, \sin u}{n n_,} \frac{dU}{ds}.$$

Mit Rücksicht auf die beiden anderen Flächenintegrale, welche sich als endliche Gleichungen zwischen den vier Veränderlichen $n\ n_,$ $i\ i_,$ darstellen, kann man von den vier Gleichungen I. I.' IV. IV.' irgend zwei streichen. Das Integral der lebendigen Kraft gestattet, noch eine dritte von diesen vier Gleichungen fortzulassen. Man gelangt auf diesem Wege zu dem erwähnten Systeme der achten Ordnung.

Es muss weiter bemerkt werden, dass die Veränderliche ϑ ausser der Derivirten ϑ' in den Differentialgleichungen nicht vorkommt. Die Integration des Systems lässt sich desshalb unabhängig von der Gleichung V. durchführen. Man behält ein System der siebenten Ordnung, und nach vollzogener Integration bestimmt sich die Veränderliche ϑ durch eine Quadratur.

Da auch die unabhängige Veränderliche t, wenn man von dem Differential dt absieht, in den Differentialgleichungen nicht vorkommt, so lässt sich leicht ein System von sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen aufstellen, durch welches sechs Veränderliche als Funktion der siebenten bestimmt werden können. Nachdem man das System der sechsten Ordnung integrirt hat, kann man auch die Veränderliche t durch eine Quadratur als Funktion jener siebenten Veränderlichen darstellen.

Schliesslich soll noch des Falles gedacht werden, dass die beiden gestörten Bahnen in eine und dieselbe Ebene hineinfallen. Die Ordnung des Systems, von dessen Integration die Lösung des Problems abhängt, ist dann um zwei Einheiten kleiner. Aus zweien der drei Flächenintegrale folgt dann ausser $i = 0$ und $i_, = 0$ noch die Gleichung $n + n_, = c$. In Folge dessen fallen drei von den Gleichungen I. I.' IV. IV.' weg, und das Integral der lebendigen Kraft kann jetzt dazu dienen, auch die vierte der genannten Gleichungen überflüssig zu machen. Ferner sieht man, dass in allen noch übrigen Gleichungen die Veränderlichen u und $u_,$ nur in der Verbindung $u - u_,$ vorkommen. Das System Differentialgleichungen ist in der That auf eines der vierten Ordnung zurückgeführt.

Zweiter Abschnitt.

Die gestörten Elemente in dem Problem der drei Körper.

§ 6. Ueber die Variation der elliptischen Elemente.

Vier Integrale des Problems haben eine endliche Form; die übrigen Integrale lassen sich nur in Reihenform als Funktion der in den Differentialgleichungen vorkommenden Veränderlichen aufstellen. Die Aufstellung solcher Reihen, welche zugleich für alle Fälle convergent sein sollen, ist davon abhängig, dass es gelinge, Funktionen aufzufinden, deren Derivirten neben den Derivirten der Coordinaten näherungsweise vernachlässigt werden können. Diese Funktionen sind als neue Veränderliche in die Differentialgleichungen einzuführen. Eine zweite Forderung, welche an die neuen Veränderlichen gestellt ist, besteht darin, dass deren Derivirten als Funktion einer einzigen unabhängig gedachten Veränderlichen sich darstellen, nachdem man alle diejenigen Glieder vernachlässigt hat, welche als kleine Grössen der zweiten oder auch einer höheren Ordnung aufgefasst werden dürfen. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so hat die Aufstellung der verlangten Reihen keine theoretischen Schwierigkeiten mehr. Die Ausführung ist auf die sogenannte Quadratur zurückgeführt.

Auf diesem Wege hat man das Problem der drei Körper für alle in dem Planetensysteme vorkommenden Fälle gelöst. Die Möglichkeit einer solchen Lösung verdankt man bekanntlich dem Umstande, dass die Bahnen der beiden um einen Centralkörper sich bewegenden Massen näherungsweise mit elliptischen Bahnen zusammenfallen. Man geht jedesmal von jenen endlichen Gleichungen aus, welche sich durch die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zweier Massenpunkte ergeben. Man nimmt an, dass die Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper zu Integralen führen, welche sich von jenen Gleichungen nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle der Integrationsbeständigen, welche man die elliptischen Elemente genannt hat, veränderliche Grössen treten. Man bedient sich jener Gleichungen, die elliptischen Elemente als veränderliche Grössen betrachtend, um die Coordinaten des gestörten Körpers in den Differentialgleichungen des Problems der drei Körper zu eliminiren. Aus den transformirten Differentialgleichungen bestimmen sich alsdann die neuen Veränderlichen.

Zu den erwähnten Integrationsbeständigen gehören vor Allem die drei Grössen $\vartheta\, i\, n$, deren Derivirten schon oben in dem ersten Abschnitte aufgestellt worden sind. Der Leitstrahl der in der ungestörten elliptischen Bahn bewegten Masse berechnet sich aus der Gleichung der Ellipse:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v,$$

wenn die wahre Anomalie v gegeben ist. Um aber die letztere als Funktion der Zeit darzustellen, kann man sich der beiden folgenden Gleichungen bedienen:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon - e\sin\varepsilon = t - c.$$

Um auch das Argument der Breite, welches oben mit u bezeichnet worden ist, aus der wahren Anomalie zu berechnen, schreibt man noch die einfache Gleichung:

$$u + \vartheta = v + \omega,$$

indem man den Winkel, welchen die grosse Achse der Ellipse mit der Knotenlinie bildet, mit $\omega - \vartheta$ bezeichnet. Diese Gleichungen enthalten noch die vier weiteren unbestimmten Beständigen $p\ e\ c\ \omega$, welche indessen neben den drei schon oben genannten $\vartheta\ i\ n$ nicht alle zu den Integrationsbeständigen der ungestörten elliptischen Bewegung gezählt werden dürfen. Denn es besteht zwischen den Elementen n und p die Gleichung $n = \sqrt{kp}$, wo k eine bekannte Beständige ist. Zu den obigen drei kommen also die weiteren drei elliptischen Elemente e, c und ω hinzu.

Die Derivirten der Elemente $\vartheta\ i\ n$ in der im § 5 gegebenen Form entsprechen in der That den vorhin ausgesprochenen Forderungen. Um auch den Derivirten der drei übrigen Elemente eine solche Darstellung zu geben, ist ein Verfahren allgemein üblich, welches sich sowohl durch Kürze als auch durch geometrische Anschaulichkeit auszeichnet. Zur Bestimmung des Leitstrahls hat man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$r'' = \frac{n^2}{r^3} - \frac{k}{r^2} + \frac{d\Omega}{dr},$$

welche sich aus der Gleichung II des § 5 herleitet, wenn man dort an die Stelle der Kräftefunktion U die Störungsfunktion Ω setzt. Man schreibe nun die Gleichung der Ellipse in der Form $\frac{p}{r} = 1 + e\cos(u + \vartheta - \omega)$, um den daraus berechneten Werth des Leitstrahls in die vorige Gleichung einzusetzen. Es tritt dann an die Stelle des Leitstrahls eine Funktion der zwei neuen Veränderlichen e und ω, und es ist in diesem Umstande die Möglichkeit ausgesprochen, diese beiden neuen Veränderlichen aus zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung zu bestimmen. Von der Annahme ausgehend, dass sich die erste Derivirte des Leitstrahls in der gestörten Ellipse ganz ebenso gestalte wie in der ungestörten, schreibt man dieselbe $r' = \frac{n}{p} e\sin(u + \vartheta - \omega)$. Geometrisch aufgefasst sagt diese Gleichung, dass die Tangente der veränderlichen Ellipse mit der Tangente der wirklichen Bahn zusammenfalle. Analytisch betrachtet hat dieselbe, da die Elemente p, e und ω in Wirklichkeit veränderlich sein sollen, eine lineare Gleichung zur Folge, welche zwischen den Derivirten $p'\ e'\ \omega'$ besteht. Man erhält, weil $n^2 = kp$ angenommen ist, die Gleichung:

$$\frac{2nn'}{kr} = e'\cos v + e\sin v\left(\omega' - 2\sin^2\frac{i}{2}\vartheta'\right).$$

Eine zweite Gleichung dieser Art ergibt sich durch die Differentiation der Gleichung:

$$r' = \frac{ne}{p}\sin(u + \vartheta - \omega).$$

Man findet:

$$r'' = \left(\frac{ne}{p}\right)'\sin v + \frac{ne}{p}\cos v\left(\frac{n}{r^2} - \omega' + 2\sin^2\frac{i}{2}\vartheta'\right).$$

Wegen $n^2 = kp$ geht die Gleichung des Leitstrahls über in:

$$r'' = \frac{ke}{r^2} \cos v + \frac{d\Omega}{dr}.$$

Setzt man diesen Werth der Derivirten r'' in die vorige Gleichung ein, so führt man dieselbe über in:

$$\frac{1}{k} \frac{d\Omega}{dr} = \left(\frac{e}{n}\right)' \sin v - \frac{e}{n} \cos v \left(\omega' - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \vartheta'\right).$$

Die Derivirte n' ist eine bekannte Grösse. Es liegen daher zwei Gleichungen vor, welche zur Bestimmung der Derivirten e' und ω' dienen können. Es zeigt sich, dass diese Derivirten gleichfalls den oben aufgestellten Forderungen entsprechen.

Um auch die Derivirte c' zu erhalten, bildet man aus jenen beiden Gleichungen, aus welchen die Veränderliche v als Funktion von t bestimmt werden soll, durch Differentiation die folgenden:

$$\frac{v'}{\sin v} = \frac{e'}{1 - e^2} + \frac{\varepsilon'}{\sin \varepsilon}, \qquad (1 - e \cos \varepsilon)\, \varepsilon' - e' \sin \varepsilon = 1 - c'.$$

Mit Rücksicht auf die bekannten Gleichungen:

$$\frac{p}{r} \sin \varepsilon = \sqrt{1 - e^2} \sin v, \qquad \frac{p}{r} (1 - e \cos \varepsilon) = 1 - e^2$$

gehen dieselben über in:

$$v' = \frac{e'}{1 - e^2} \sin v + \frac{p}{r} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{1 - e^2}}, \qquad (1 - e^2)\, \varepsilon' - \sqrt{1 - e^2} \sin v\, e' = \frac{p}{r} (1 - c').$$

Durch die Elimination von ε' erhält man, wenn zugleich $p = a(1 - e^2)$ gesetzt wird:

$$v' = \left(\frac{p}{r} + 1\right) \sin v \frac{e'}{1 - e^2} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1 - e^2}\, (1 - c').$$

Setzt man noch $v' = \frac{n}{r^2} - \omega' + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \vartheta'$, so hat man zur Bestimmung der Derivirten c' die Gleichung:

$$\omega' - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \vartheta' + \left(\frac{p}{r} + 1\right) \sin v \frac{e'}{1 - e^2} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1 - e^2} \left(\sqrt{\frac{k}{a^3}} - 1 + c'\right).$$

Für den Fall der ungestörten elliptischen Bewegung verschwinden darin alle Derivirten. Da dann zugleich a in a_0 übergeht, so folgt, dass die Beständige $k = a_0^3$ ist. Aus den übrigen Störungsgleichungen darf die erste Näherung der grossen Achse a als bekannt vorausgesetzt werden. Es ist desshalb die Grösse $\sqrt{\frac{a_0^3}{a^3}} - 1$ als Störungsglied der ersten Ordnung gegeben; und die Derivirte c' besitzt gleichfalls die oben verlangten Eigenschaften.

Die Derivirten ω' und c', aus den vorliegenden Gleichungen hergeleitet, haben den kleinen Nenner e, was offenbar die Kleinheit ihres Zahlenwerthes beeinträchtigt. Man hat diesen Uebelstand fern zu halten gesucht, indem man durch die geeignete Verbindung der elliptischen Elemente andere

Elemente herstellt, in deren Derivirten der Nenner e nicht mehr vorkommt. Wie auch immer dies zu Stande kommen mag, so sind doch die bis dahin in der Störungstheorie erlangten Resultate jedesmal auf die Voraussetzung gegründet, dass die oben genannten sechs elliptischen Elemente als veränderliche Grössen gedacht werden sollen.

§ 7. Die elliptischen Elemente werden durch andere Elemente der Störung ersetzt.

Es war wohl ein glücklicher Gedanke, um zur Lösung des Problems zu gelangen, gewisse Grössen, welche in der ungestörten elliptischen Bewegung beständig sind, als neue Veränderliche in die Differentialgleichungen der Bewegung einzuführen. Es ist dies in der That ein Weg, welcher überall zu einem brauchbaren Resultate führt, wo man voraussetzen darf, dass die darzustellende Erscheinung nur geringe Abweichungen zeigt von der Lösung eines bestimmten Falles, welche als bekannt vorausgesetzt zum Ausgangspunkte genommen ist. Die Variation der Constanten ist Nichts anders, als eine bestimmt vorgeschriebene Regel, nach welcher man die Differentialgleichungen zu transformiren hat, damit die Integration nur noch von Quadraturen abhänge. Solche Transformationen sind bekanntlich allgemein giltigen Regeln nicht unterworfen. Die Aufstellung derselben ist immer nur für besondere Aufgaben möglich, deren Eigenschaften sich in bestimmter Weise kennzeichnen. Die Variation der Constanten erweist sich als eine der wichtigsten und umfassendsten Regeln dieser Art, welche man überhaupt hat aufstellen können. Es sind aber, weil dieses Hilfsmittel zum Theil am unrechten Orte angewendet worden ist, bis dahin noch viele Schwierigkeiten in der Störungstheorie übrig geblieben, welche zu lösen dasselbe berufen sein dürfte.

Man findet die erste Näherung der elliptischen Elemente, indem man bei der Integration der Störungsgleichungen die in den einzelnen Gliedern vorkommenden Elemente als Beständige betrachtet. In denjenigen Fällen, wo man sich mit der Genauigkeit der ersten Näherung begnügen darf, ist die Integrationsarbeit eine verhältnissmässig einfache zu nennen. Wenn aber die zweite Näherung der Integrale verlangt wird, so tragen zwei der obigen Elemente vorzugsweise die Schuld, dass die Integration ausserordentlichen Schwierigkeiten begegnet. Es sind dies die Excentricität e der Ellipse, und die Beständige der mittleren Anomalie, welche mit c bezeichnet worden ist. Diese beiden Elemente kommen in dem Werthe des Leitstrahls vor, wenn man denselben aus der Gleichung der Ellipse als Funktion der Zeit bestimmt. Es zeigt sich dann, dass die Störungsglieder verwickelte Funktionen der genannten zwei Elemente sind. Wenn die zweite Näherung des Integrals aufgestellt werden soll, so müssen die elliptischen Elemente variirt werden. Diese Rechnung ist es, welche in der bisherigen Störungstheorie einen so erschreckenden Umfang annimmt.

Noch ein anderer Vorwurf kann der Methode, welche auf die Variation der elliptischen Elemente gegründet ist, nicht erspart werden. Der Leitstrahl der Ellipse erleidet eine Störung, welche auf die Veränderlichkeit der elliptischen Elemente bezogen, in erster Linie dem Parameter zuzuweisen ist. Die Möglichkeit, die Störung des Leitstrahls auf diesen Ursprung zurückzuführen, ist aber durch die Annahme, dass die Gleichung $n = \sqrt{kp}$, welche in der ungestörten Ellipse besteht, in der gestörten fortbestehe, von vornherein abgeschnitten. Denn die Derivirte von n ist durch die Gleichung I. des § 5 bestimmt, und durch die vorstehende Gleichung hat man auch über den Parameter verfügt. Es bleibt dann nichts übrig, da $\frac{p}{r} = 1 + e\cos(u + \vartheta - \omega)$ ist, als die Störung des Leitstrahls auf eine Variation des Gliedes $e\cos(u + \vartheta - \omega)$ zurückzuführen. Als periodisches Glied verschwindet dasselbe in gewissen Zeitpunkten, erreicht aber andernfalls immer nur einen kleinen Bruchwerth; in der Theorie des Mondes höchstens

den Bruchwerth $\frac{1}{18}$. Während sich die Störung des Leitstrahls durch eine Variation des Parameters darstellen liesse, welche jederzeit nur einen kleinen Bruchtheil desselben ausmachen würde, ist man genöthigt, dieselbe aus der kleinen Grösse $e \cos(u + \vartheta - \omega)$ herzuleiten, welche in Folge dessen unverhältnissmässig grossen Variationen unterworfen ist.

Die im vorigen Paragraphen berührten Vorzüge der Methode, nach welcher die drei letzten Störungsgleichungen dort hergeleitet werden, die Kürze und die geometrische Anschaulichkeit, sind kein hinreichender Grund, auf die grossen Schwierigkeiten, welche deren Integration im Gefolge hat, einzugehen. Es hat mir eines ernsten Versuches werth geschienen, ob nicht diejenigen Schwierigkeiten, welche der Integration eines auf andere Voraussetzungen gegründeten Systems von Störungsgleichungen entgegenstehen, viel eher zu überwinden seien, als die soeben besprochenen. Wenn auch lange Zeit meine Bemühungen erfolglos zu sein schienen, so bin ich nun doch im Stande, ein Integrationsverfahren einzuschlagen, welches von den beiden soeben berührten Mängeln frei ist.

Ich schreibe die Gleichung $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$, wo p wieder als Veränderliche gedacht wird; dagegen e eine Beständige ist. Der Winkel v, als Funktion der Zeit aufgefasst, soll durch die Differentialgleichung $v' = l\left(\frac{p}{r}\right)^2$ bestimmt sein, wo l gleichfalls eine Beständige bezeichnet, und auch die in das Integral dieser Gleichung eingehende willkürliche Beständige c ungestört bleiben soll. Die oben erwähnte Gleichung $u = l\,kp$ soll wegfallen. Ich behalte daher neben den Elementen ϑ i u eine vierte Veränderliche p zum Behufe der Herstellung von Störungsgleichungen. Zur Bestimmung von p ergibt sich dann allerdings zunächst eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Allein man findet, dass auch die Veränderliche p, in ähnlicher Weise wie vorhin der Leitstrahl r, als Funktion zweier neuen Veränderlichen dargestellt werden kann, deren Derivirten ebenso wie die Derivirten von ϑ i u die im § 6 gestellten Forderungen erfüllen. Zur Bestimmung der sechsten Veränderlichen ω habe ich noch die Gleichung $u + \vartheta = v + \omega$.

Da auch jetzt wieder die neu einzuführenden Veränderlichen in der ungestörten elliptischen Bahn als Beständige auftreten, so mögen dieselben die Elemente der Störung oder die gestörten Elemente genannt werden.

§ 8. Feststellung der Zeiteinheit.

In der Folge soll vorzugsweise die Bahn der einen Masse m betrachtet, und dabei die Annahme festgehalten werden, dass dieselbe von der Bahn der anderen Masse vollständig eingeschlossen sei, dass also jederzeit $r < r_i$ sei. Es ist ferner kein unwesentlicher Beitrag zur Vereinfachung der Rechnung, wenn man den der Kräftefunktion U beigefügten beständigen Factor x in solcher Weise bestimmt, dass in der Gleichung $v' = l\left(\frac{p}{r}\right)^2$ der Coefficient l zur Einheit werde. Der Coefficient l_i in der Gleichung $v_i' = l_i\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^2$ mag in Folge dessen in λ übergehen.

Man gehe in dieser Absicht von der Gleichung 18. des § 5 aus:

$$r'' = \frac{u^2}{r^3} + \frac{dU}{dr}.$$

In der Kräftefunktion U setze man $\varepsilon = o$, und entwickle $\frac{dU}{dr}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{r_i}$, um als-

dann alle Glieder dieser Entwicklung mit Ausnahme des mit $\frac{1}{r^2}$ multiplicirten Gliedes gleichfalls zu streichen. Ferner setze man an die Stelle des gestörten Elementes n eine Beständige n_0. Man behält die Gleichung:

$$r'' = \frac{n_0^2}{r^3} - \frac{\varkappa}{r^2}\sqrt{\frac{m^3}{1+m}},$$

und man darf annehmen, dass dieselbe identisch sei mit der entsprechenden für die ungestörte Ellipse giltigen Gleichung. Für den Fall, dass eine Störung der elliptischen Bahn nicht stattfindet, hat die Gleichung des Leitstrahls die Form $\frac{p_0}{r} = 1 + e\cos v$, wo p_0 eine Beständige ist. Da nun $v' = \left(\frac{p_0}{r}\right)^2$ sein soll, so entstehen durch zweimaliges Differentiiren die beiden Gleichungen:

$$r' = p_0 e \sin v \qquad \text{und} \qquad r'' = \frac{p_0^4}{r^3} - \frac{p_0^3}{r^2}.$$

Aus der Vergleichung der letzteren mit Obigem ergibt sich, dass

$$n_0 = p_0^2 \qquad \text{und} \qquad \varkappa\sqrt{\frac{m^3}{1+m}} = p_0^3$$

sein muss, und es ist hiermit der Coefficient $\varkappa$ der Forderung gemäss bestimmt.

Verfährt man in ähnlicher Weise mit der Gleichung:

$$r_,'' = \frac{n_,^2}{r_,^3} + \frac{dU}{dr_,},$$

behält man also in der Entwicklung von $\frac{dU}{dr_,}$ nach Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_,}$ nur die mit $\frac{1}{r_,^2}$ multiplicirten Glieder, und setzt man die Beständige n_ω an die Stelle von $n_,$, so findet man:

$$r_,'' = \frac{n_\omega^2}{r_,^3} - \frac{\varkappa}{r_,^2}\sqrt{\frac{m_,^3(1+m)^3}{1+m+m_,}}.$$

Ferner findet man für die ungestörte Ellipse, weil $v_,' = \lambda\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2$ ist, die entsprechende Gleichung:

$$r_,'' = \lambda^2\left(\frac{p_\omega^4}{r_,^3} - \frac{p_\omega^3}{r_,^2}\right).$$

Aus der Vergleichung ergeben sich diesmal die beiden:

$$n_\omega = \lambda p_\omega^2 \qquad \text{und} \qquad \varkappa\sqrt{\frac{m_,^3(1+m)^3}{1+m+m_,}} = \lambda^2 p_\omega^3.$$

Durch die Elimination von $\varkappa$ aus den jetzt vorliegenden Gleichungen ergibt sich alsdann die Gleichung:

1. $$\lambda^3 = \frac{(1+m)^2}{\sqrt{1+m+m_,}}\left(\frac{\sqrt{m_,}\,p_0}{\sqrt{m}\,p_\omega}\right)^3.$$

Der Coefficient λ^2 lässt sich hiernach durch die drei Beständigen $m\ m_,\ \frac{p_0}{p_\omega}$ bestimmen. Unter der oben

zu Grunde gelegten Annahme, dass jederzeit $r < r_{,}$ sei, findet man $\lambda < 1$. In der Theorie des Mondes ist nahezu $\lambda = \frac{1}{13}$.

Zur Vergleichung wird hier noch bemerkt, dass in Pbl. III eine andere Wahl der Zeiteinheit getroffen ist. In § 21 ist dort die Gleichung $r_{,}' = \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2$ zum Ausgangspunkte genommen, und im Weiteren ist der dem obigen $\frac{l}{l_{,}}$ entsprechende Coefficient mit λ bezeichnet. Hiernach ist nun λ an die Stelle des dortigen $\frac{1}{\lambda}$ getreten. Es ist auch nicht zu übersehen, dass λ hier eine Beständige ist, während dasselbe dort als Veränderliche aufgefasst werden musste.

§ 9. Bestimmung des Parameters.

Indem ich zur gestörten elliptischen Bahn zurückkehre, nehme ich sogleich die Bestimmung des Parameters in Angriff. Ich gehe wieder von der Gleichung des Leitstrahls aus:

$$rr'' = \frac{n^2}{r^2} + r\frac{dU}{dr}.$$

An die Stelle der Kräftefunktion U setze ich die Störungsfunktion Ω, indem ich

$$U = \frac{p_0^2}{r} + \frac{\lambda^2 p_0^2}{r_{,}} + \Omega$$

schreibe. Man hat dann die Gleichung:

$$rr'' = \frac{n^2}{r^2} - \frac{p_0^2}{r} + r\frac{d\Omega}{dr},$$

in welcher die Grösse $r\frac{d\Omega}{dr}$ nur Störungsglieder enthält. Um die Störungsglieder der zweiten und der höheren Ordnungen vorerst ausser Acht zu lassen, macht man in der Grösse $r\frac{d\Omega}{dr}$ alle gestörten Elemente zu Beständigen. Die sonst noch in der Gleichung vorkommenden Glieder der ersten Ordnung sind aber nicht unabhängig von der Störung der Elemente. Der Werth des Elementes n muss hier eingesetzt werden, bevor man zur Integration der Gleichung schreitet. Es ist leicht zu sehen, dass die erste Näherung von n unabhängig von den übrigen Elementen gefunden wird, indem man sich der Gleichung:

$$n' = \frac{ds}{du}\frac{d\Omega}{ds}$$

bedient. Denn es dürfen hier auf der rechten Seite in dieser Absicht die Elemente als Beständige angesehen werden. Nachdem man die erste Näherung von n in die obige Gleichung eingesetzt und zugleich den Leitstrahl r mittels der Gleichung $\frac{p}{r} = 1 + e\cos v$ eliminirt hat, behält man zur Bestimmung der ersten Näherung von p eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung.

Es hat wohl den Anschein, dass dieser Weg als der kürzeste zum Ziele führen werde. Es erweist sich aber doch als förderlicher, bevor man zur Bestimmung von p schreitet, an die Stelle von n ein

anderes Element in die Gleichung einzuführen. Ich schreibe, um eine andere Gleichung zur Bestimmung von p aufzustellen, die Gleichung des Leitstrahls in der folgenden Form an:

$$(rr')' = r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{p_0^2}{r} + r\frac{d\Omega}{dr}.$$

Für die ungestörte Ellipse sind oben die Gleichungen aufgezeichnet worden:

$$\frac{p_0}{r} = 1 + e\cos v \qquad\qquad r' = p_0 e \sin v.$$

Daraus findet man durch die Elimination von v:

$$r'^2 + \frac{p_0^4}{r^2} - \frac{2p_0^3}{r} + p_0^2(1-e^2) = o.$$

Daraufhin schreibe ich, da $n_0 = p_0^2$ ist, für die gestörte Ellipse die Gleichung:

2. $$r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2p_0^3}{r} + p_0^2(1-e^2) = q,$$

wo die Veränderliche q als eine kleine Grösse der ersten Ordnung aufzufassen ist. Dies q führe ich als gestörtes Element in die Differentialgleichungen ein, und soll dasselbe in dieser Eigenschaft die Stelle des obigen Elements n vertreten. Weiter unten wird man sehen, dass die Störungsglieder der ersten Ordnung in der Derivirten q' ebenso wie in der Derivirten n' unabhängig von den Störungen der übrigen Elemente sind, und dass also die erste Näherung von q gleichfalls durch eine Quadratur gefunden wird. Die Gleichung des Leitstrahls geht jetzt über in:

$$(rr')' = \frac{p_0^3}{r} - p_0^2(1-e^2) + q + r\frac{d\Omega}{dr}.$$

Nachdem man die erste Näherung von q eingesetzt hat, erhält man zur Bestimmung der ersten Näherung von p wieder eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Die Integration, welche oben, wo die erste Näherung des Elementes n eingesetzt werden sollte, Schwierigkeit gemacht haben würde, lässt sich hier leicht bewerkstelligen.

Um nun den Parameter p zu bestimmen, schreibe man $rr' = \frac{1}{2}(r^2)'$; und in Folge dessen die obige Gleichung in der folgenden Form:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 p^2\right)'' = \frac{p_0^3}{r} - p_0^2(1-e^2) + q + r\frac{d\Omega}{dr}.$$

Man kann dieselbe so einrichten, dass nur Störungsglieder darin vorkommen. Aus der Gleichung der Ellipse $\frac{p}{r} = 1 + e\cos v$ folgt $\left(\frac{r}{p}\right)' = e\sin v$, und daraus weiter:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2\right)'' = \frac{p}{r} - 1 + e^2.$$

Man multiplicirt dies mit p_0^2, um es alsdann von der vorigen Gleichung abzuziehen. Man erhält zur Bestimmung von p die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 (p^2 - p_0^2)\right)'' = \frac{p}{r}\left(\frac{p_0^3}{p} - p_0^2\right) + q + r\frac{d\Omega}{dr}$$

welche in der That nur noch Störungsglieder enthält.

Wenn man hier beiderseits die Grösse $p^2 - p_0^2$, mit einem beliebigen Factor verbunden, addirt, so hat man auf der linken Seite eine lineare Funktion der Veränderlichen $p^2 - p_0^2$ und deren erster und zweiter Derivirten. Man kann aber diesen Factor von $p^2 - p_0^2$ so wählen, dass die rechtsstehenden von p abhängigen Glieder eine kleine Grösse der zweiten Ordnung darstellen. Ich addire beiderseits $\frac{1}{2}\frac{p}{r}(p^2 - p_0^2)$; und die rechtsstehenden von p abhängigen Glieder sind:

$$\frac{1}{2}\frac{p}{r}\left(p^2 + \frac{2p_0^3}{p} - 3p_0^2\right) = \frac{1}{2}\frac{p}{r}\left(1 + \frac{2p_0}{p}\right)(p - p_0)^2,$$

was in der That eine kleine Grösse der zweiten Ordnung ist, weil $p - p_0$ als eine Grösse der ersten Ordnung aufgefasst werden muss. Gebraucht man noch die Abkürzung:

$$\frac{1}{2}\frac{p}{r}\left(p^2 + \frac{2p_0^3}{p} - 3p_0^2\right) = P,$$

so schreibt sich die Gleichung des Parameters in der Form:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 (p^2 - p_0^2)\right)'' + \frac{1}{2}\frac{p}{r}(p^2 - p_0^2) = q + r\frac{d\Omega}{dr} + P.$$

Indem man die Störungsglieder der zweiten Ordnung vorerst als nicht vorhanden betrachtet, hat man zur Bestimmung der ersten Näherung von $p^2 - p_0^2$ eine lineare Differentialgleichung der zweiten Ordnung, deren Integration nach bekannten Regeln ausgeführt werden kann. Um dieselbe noch weiter zu vereinfachen, setzt man abkürzend $\left(\frac{r}{p}\right)^2 (p^2 - p_0^2) = 2z$. Man behält die einfache Gleichung:

3. $$z'' + \left(\frac{p}{r}\right)^3 z = q + r\frac{d\Omega}{dr} + P.$$

Es lassen sich leicht zwei Werthe z der reducirten Gleichung:

$$z'' + \left(\frac{p}{r}\right)^3 z = o$$

angeben. In der That genügen dieser Gleichung die beiden Werthe:

$$z = \frac{r}{p}\sin v \qquad\qquad z = \frac{r}{p}\cos v.$$

Denn man findet die entsprechenden Derivirten:

$$\left(\frac{r}{p}\sin v\right)' = \cos v + e \qquad\qquad \left(\frac{r}{p}\cos v\right)' = -\sin v$$

$$\left(\frac{r}{p}\sin v\right)'' = -\left(\frac{p}{r}\right)^3 \sin v. \qquad\qquad \left(\frac{r}{p}\cos v\right)'' = -\left(\frac{p}{r}\right)^3 \cos v.$$

Um das vollständige Integral der Gleichung 3. aufzustellen, setze man:

$$z = \frac{r}{p}\,(k \cos v + h \sin v),$$

wo k und h zwei neue Elemente sind, welche an die Stelle von p tretend die Forderung erfüllen, dass in deren ersten Derivirten alle Glieder erster Ordnung sich als gegebene Grössen darstellen. Durch die Differentiation des Vorliegenden entsteht:

$$z' = \frac{r}{p}\,(k' \cos v + h' \sin v) - k \sin v + h\,(\cos v + e).$$

Lässt man den Factor von $\frac{r}{p}$ für sich verschwinden, schreibt man also:

$$k' \cos v + h' \sin v = o,$$

so behält man die einfachere Gleichung:

$$z' = -\,k \sin v + h\,(\cos v + e).$$

Ferner erhält man durch die zweite Differentiation:

$$z'' + \left(\frac{p}{r}\right)^2 z = -\,k' \sin v + h'\,(\cos v + e).$$

Aus deren Verbindung mit der Gleichung 3. ergibt sich zur Bestimmung der Derivirten k' und h', neben der obigen, noch eine zweite Gleichung, nämlich:

$$-\,k' \sin v + h'\,(\cos v + e) = q + r\,\frac{d\Omega}{dr} + P.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die Derivirten:

4. $$-\,k' = \frac{r}{p} \sin v \left(q + r\,\frac{d\Omega}{dr} + P\right)$$

5. $$h' = \frac{r}{p} \cos v \left(q + r\,\frac{d\Omega}{dr} + P\right).$$

Die Störungsglieder der ersten Ordnung sind in der That unabhängig von den Störungen der Elemente, das Element q selbstverständlich ausgenommen, dessen Werth in die Gleichungen eingesetzt werden muss, bevor man zu deren Integration schreitet.

Nachdem man die Elemente k und h bestimmt hat, findet man auch den Parameter. Dazu dient die Gleichung:

6. $$p^2 - p_0^2 = 2\,\frac{p}{r}\,(k \cos v + h \sin v).$$

Die Derivirte p' findet man durch die Differentiation des Vorliegenden. Es ist:

7. $$\left(\frac{r}{p}\right)^2 pp' = -\,\frac{p}{r}\,(k \sin v - h \cos v) - e \sin v\,(k \cos v + h \sin v).$$

Auf diesem Wege gelangt man mit Hilfe von Quadraturen zu der ersten Näherung von p. Wenn

bei der Integration der Störungsgleichungen die Glieder der zweiten und höheren Ordnungen mitberücksichtigt werden sollen, so kommt auch das Glied P in Betracht, welches bekanntlich eine Funktion von p ist. Man schreibt, weil neben p^2 auch andere Potenzen von p vorkommen, die Gleichung 6. zweckmässig in der kürzeren Form:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2y, \qquad \text{wo} \qquad y = \frac{1}{p_0^2}\frac{p}{r}(k\cos\varepsilon + h\sin\varepsilon).$$

Unter Anwendung des binomischen Satzes ergibt sich:

$$\frac{p}{p_0} = (1+2y)^{\frac{1}{2}} = 1 + y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^3 - \frac{5}{8}y^4 + \frac{7}{8}y^5 - \cdots$$

$$\frac{p_0}{p} = (1+2y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{35}{8}y^4 - \frac{63}{8}y^5 + \cdots$$

Man kann nun das oben als eine Grösse zweiter Ordnung in die Störungsgleichungen eingeführte P in einer nach steigenden Potenzen von y geordneten Reihe ausdrücken. Man findet:

$$P = \frac{1}{2}\frac{p}{r}\left(p^2 + \frac{2p_0^3}{p} - 3p_0^2\right) = \frac{1}{2}\frac{p}{r}p_0^2\left(3y^2 - 5y^3 + \frac{35}{4}y^4 - \frac{63}{4}y^5 + \cdots\right).$$

§ 10. Bestimmung der Veränderlichen q.

Aus den Störungsgleichungen 4. und 5. findet man die Elemente k und h, unter der Voraussetzung, dass das Element q bekannt ist. Um q zu bestimmen, geht man von der Gleichung 2. aus:

$$r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2p_0^2}{r} + p_0^2(1-e^2) = q.$$

Durch Differentiation findet man die Derivirte:

$$q' = \frac{2nn'}{r^2} + 2r'\left(r'' - \frac{n^2}{r^3} + \frac{p_0^2}{r^2}\right),$$

oder auch, indem man die bekannten Derivirten n' und r'' einsetzt, die Störungsgleichung:

8. $$\frac{1}{2}q' = \frac{d\Omega}{ds}\frac{ds}{du}\frac{n}{r^2} + \frac{d\Omega}{dr}r'.$$

Man findet aus derselben ohne Weiteres die erste Näherung von q, weil alle Störungsglieder erster Ordnung in dieser Gleichung gegebene Grössen sind. Die Integrationsarbeit kann übrigens erheblich abgekürzt werden, wenn man bemerkt, dass sich der Hauptbestandtheil des Integrals sehr leicht vermittelst der Störungsfunktion ausdrückt. Man hat nämlich die Derivirte:

$$\Omega' = \left(\frac{d\Omega}{ds}\frac{ds}{du}\frac{n}{r^2} + \frac{ds}{du_1}\frac{n_1}{r_1^2}\right) + \frac{d\Omega}{dr}r' + \frac{d\Omega}{dr_1}r_1',$$

und die Gleichung 8. geht in Folge dessen über in:

$$\frac{1}{2}q' = \Omega' - \frac{d\Omega}{ds}\frac{ds}{du_,}\frac{n_,}{r_,^2} - \frac{d\Omega}{dr_,}r_,'.$$

Für die ungestörte Ellipse hat man $n_{0,} = \lambda p_{0,}^2$. und $r_, = \lambda p_{0,} e_, \sin v_,$. Daraus ersieht man, dass von den beiden neben der Derivirten Ω' in der vorstehenden Gleichung vorkommenden Gliedern das eine den Factor λ, das andere den Factor $\lambda e_,$ hat. Diese beiden Factoren sind aber kleine Bruchwerthe, und es ist offenbar die Störungsfunktion Ω der Hauptbestandtheil des Werthes q.

Zu demselben Resultate gelangt man auch mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft. Dasselbe zeigt sich, nachdem man noch abkürzend:

$$r_,'^2 + \frac{n_,^2}{r_,^2} - \frac{2\lambda^2 p_{0,}^3}{r_,} + \lambda^2 p_{0,}^2(1 - e_,^2) = q_,$$

gesetzt hat, in der folgenden einfachen Form:

$$q + q_, = 2\Omega - a.$$

Wenn man dies differentiirt, und alsdann die aus der vorigen Gleichung hergeleitete Derivirte

9. $$\frac{1}{2}q_,' = \frac{d\Omega}{ds}\frac{ds}{du_,}\frac{n_,}{r_,^2} + \frac{d\Omega}{dr_,}r_,'$$

dahin einsetzt, so hat man wieder die letztere Form der Derivirten q'. Man gelangt also zu derselben Form des Werthes q, welche aus der obigen Umwandluug der Gleichung 8. hervorgeht, indem man den aus der Gleichung 9. bestimmten Werth $q_,$ in das Integral der lebendigen Kraft einsetzt, und alsdann aus dem letzteren die Veränderliche q bestimmt.

Man hat hiermit noch einen weiteren Anlass gefunden, an die Stelle jenes Elementes n das neue Element q zu setzen. Das letztere bestimmt sich nämlich vortheilhafter als jenes ursprüngliche Element n; abgesehen davon, dass auch die Bestimmung von p durch die Einführung von q gefördert worden ist. Die Vertauschung von n gegen q hat eine Beziehung zu derjenigen Umwandlung, welche im § 34, Pbl. III gemacht ist, da ich dort die Gleichung zur Bestimmung des Parameters durch die Gleichung der grossen Achse ersetzt habe.

Ich darf es nicht unterlassen, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass für den Fall, wo die Bahn des störenden Körpers als eine ungestörte Ellipse angesehen werden soll, in der vorliegenden Störungsgleichung 9. nur die vier gestörten Elemente $p\,\omega\,i\,\vartheta$ vorkommen, wiewohl es im Problem deren sechs gibt. Es ist von Wichtigkeit, die Anzahl der gestörten Elemente, welche in den Störungsgliedern vorkommen, zu vermindern, weil die erste Näherung des Integrals nach denselben variirt werden muss, wenn man zu der zweiten Näherung des Integrals gelangen will.

Indem man $q_,$ an die Stelle von q treten lässt, zeigen sich selbstverständlich auch die Störungsgleichungen 4. und 5., aus welchen die Elemente k und h bestimmt werden sollen, unter einer etwas geänderten Gestalt. Man hat nämlich gefunden:

$$-k' = \frac{r}{p}\sin v\left(q + r\frac{d\Omega}{dr} + P\right)$$

$$h' = \frac{r}{p}\cos v\left(q + r\frac{d\Omega}{dr} + P\right).$$

Dieselben gehen jetzt über in:

4

$$-k' = \frac{r}{p} \sin v \left(2\,\Omega - a - q_{,} + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right)$$

$$h' = \frac{r}{p} \cos v \left(2\,\Omega - a - q_{,} + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right).$$

Mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$r \frac{d\Omega}{dr} + r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} + \Omega = o$$

schreibt man dieselben zweckmässiger:

10. $$-k' = \frac{r}{p} \sin v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - a - q_{,} + P \right)$$

11. $$h' = \frac{r}{p} \cos v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - a - q_{,} + P \right).$$

Die aus der Gleichung 9. zu bestimmende Veränderliche $q_{,}$ hat man in diese Gleichungen einzusetzen, um die Elemente k und h bestimmen zu können. Nach erfolgter Substitution besitzen dieselben für den angegebenen Fall gleichfalls die Eigenschaft, dass nur die vier gestörten Elemente $p\,\omega\,i\,\vartheta$ darin vorkommen.

§ 11. Bestimmung des Perihels.

Man kennt jetzt die Derivirten der Elemente $\vartheta\,i\,k\,h\,q$. Es bleibt noch übrig, die Derivirte des sechsten Elementes $\omega = u + \vartheta - v$ aufzustellen. Es ist $\omega' = u' + \vartheta' - v'$. Indem man die bekannten Derivirten hier einsetzt, erhält man die Störungsgleichung:

$$\omega' - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \vartheta' = \frac{n - p^2}{r^2},$$

in welcher das Element n eine Stelle einnimmt.

Nachdem man die ersten Näherungen von $k\,h$ und q bestimmt hat, ergibt sich die erste Näherung von n aus der Gleichung 2.:

$$r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2 p_0^2}{r} + p_0^2 (1 - e^2) = q.$$

Es ist $r' = pe \sin v + \frac{r}{p} p'$. In Folge dessen geht die vorliegende Gleichung über in:

$$\frac{n^2 - p^4}{r^2} + 2 \frac{p}{r} \left(p^2 - \frac{p_0^2}{p} \right) - (p^2 - p_0^2)(1 - e^2) + 2\,rp'\,e \sin v + \left(\frac{r}{p} \right)^2 p'^2 = q.$$

Zum Behuf der weiteren Rechnung gibt man derselben eine vortheilhaftere Gestalt, indem man anstatt des Gliedes $2rp'e \sin v$ vermittelst einer theilweisen Integration eine vollständige Derivirte einführt. Man schreibt in dieser Absicht:

$$2\,pp'\frac{r}{p}\,e\sin v = \left(\frac{r}{p}\,e\sin v\,(p^2 - p_0^2)\right)' + \left(1 - e^2 - \frac{p}{r}\right)(p^2 - p_0^2).$$

Die Gleichung zur Bestimmung von n geht dann über in:

$$\frac{n^2 - p^4}{r^2} + 2\,\frac{p}{r}\left(p^2 - \frac{p_0^3}{p}\right) - \frac{p}{r}(p^2 - p_0^2) + \left(\frac{r}{p}\,e\sin v\,(p^2 - p_1^2)\right)' + \left(\frac{r}{p}\right)^2 p'^2 = q.$$

Indem man nun die schon oben angewendeten Abkürzungen einführt:

$$\frac{1}{2}\,\frac{p}{r}\left(p^2 + \frac{2\,p_0^3}{p} - 3\,p_0^2\right) = P, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 (p^2 - p_0^2) = z,$$

schreibt man dieselbe noch einfacher:

12. $$\frac{n^2 - p^4}{r^2} + 4\,z\left(\frac{p}{r}\right)^3 + 2\left(z\,\frac{p}{r}\,e\sin v\right)' = q + 2\,P - \left(\frac{r}{p}\right)^2 p'^2.$$

Der aus dieser Gleichung berechnete Werth n soll nun in dio obige Störungsgleichung eingesetzt werden. Der vollständige Werth n ist zwar durch eine Wurzelgrösse ausgedrückt, welche jedenfalls in einer Reihe entwickelt werden muss. In so fern es sich aber bei der Bestimmung von n nur um die erste Näherung handelt, ist eine einfachere Darstellung dieses Werthes zulässig. Man mache von der nachfolgenden identischen Gleichung Gebrauch:

$$2\,p_0^2(n - p^2) = n^2 - p^4 + (p^2 - p_0^2)^2 - (n - p_0^2)^2,$$

auf deren rechter Seite die Grösse $n^2 - p^4$ durch die Gleichung 12. unmittelbar gegeben ist. Die beiden andern Glieder zur Rechten sind kleine Grössen der zweiten Ordnung. Zur Bestimmung von ω hat man dann die Störungsgleichung:

$$p_0^2\left(\omega' - 2\sin^2\frac{i}{2}\,\vartheta'\right) = -2\,z\left(\frac{p}{r}\right)^3 - \left(z\,\frac{p}{r}\,e\sin v\right)' + \frac{1}{2}\,q + P - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 p'^2 + \frac{1}{2}\,\frac{(p^2 - p_0^2)^2}{r^2} - \frac{1}{2}\,\frac{(n - p_0^2)^2}{r^2}.$$

Man führe noch die folgende Abkürzung ein:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 p'^2 - \frac{1}{2}\,\frac{(p^2 - p_0^2)^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{(n - p_0^2)^2}{r^2} = N,$$

und man schreibt die etwas einfachere Störungsgleichung:

$$p_0^2\left(\omega' - 2\sin^2\frac{i}{2}\,\vartheta'\right) = -2\,z\left(\frac{p}{r}\right)^3 - \left(z\,\frac{p}{r}\,e\sin v\right)' + \frac{1}{2}\,q + P - N,$$

wo P und N kleine Grössen der zweiten Ordnung sind.

Das zweite Glied der rechten Seite ist eine vollständige Derivirte. Auch das erste Glied der rechten Seite, welches durch die Elemente k und h bestimmt ist, lässt sich integriren, ohne vorher die ersten Näherungen von k und h eingesetzt zu haben. Indem man sich der Gleichung 3. bedient:

$$z'' + \left(\frac{p}{r}\right)^3 z = q + r\,\frac{d\Omega}{dr} + P,$$

ist man in den Stand gesetzt, dasselbe durch eine Derivirte zu ersetzen. Die Störungsgleichung geht nun über in:

$$p_0^2\left(\omega' - 2\sin^2\frac{i}{2}\,\vartheta'\right) = 2z' - \left(z\,\frac{p}{r}\,e\sin v\right)' - 2r\,\frac{d\Omega}{dr} - \frac{3}{2}\,q - P - N;$$

und man kann dieselbe integriren, ohne die ersten Näherungeu von k und h zu kennen.

Man findet zum Behufe der weiteren Vereinfachung:

$$2z' - z\,\frac{p}{r}\,e\sin v = -2\,\frac{p}{r}\,(k\sin v - h\cos v) + e\sin v\,(k\cos v + h\sin v).$$

Eliminirt man ausserdem q vermittelst des Integrals der lebendigen Kraft:

$$q + q_{,} + a = 2\,\Omega,$$

so schreibt sich, mit Rücksicht auf die identische Gleichung

$$r\,\frac{d\Omega}{dr} + r_{,}\,\frac{d\Omega}{dr_{,}} + \Omega = o$$

die Störungsgleichung in der folgenden Form:

13. $$-p_0^2\left(\omega' - 2\sin^2\frac{i}{2}\,\vartheta'\right) = \left(2\,\frac{p}{r}\,(k\sin v - h\cos v) - e\sin v\,(k\cos v + h\sin v)\right)' + \Omega - 2r_{,}\,\frac{d\Omega}{dr_{,}} - \frac{3}{2}\,(q_{,} + a) + P + N.$$

Dieselbe hat eine unverkennbare Aehnlichkeit mit derjenigen Form, welche ich im § 33, Pbl. III aufgestellt habe.

Die Störungsgleichung **13.** enthält das Element n noch in dem Werthe N. Derselbe ist ebenso wie jenes P, welches auch schon in den Störungsgleichungeu **10.** und **11.** vorkommt, als eine kleine Grösse der zweiten Ordnung zu betrachten. Doch zeigt sich dies N in einem anderen Verhältnisse zu der Gleichung **13.** als jenes P zu den Gleichungen **10.** und **11.** Die Grösse P kann erst dann angegeben werden, nachdem man durch die Integration der Gleichungen **10.** und **11.**, in welchen P eine Stelle einnimmt, die Elemente k und h bestimmt hat. Dagegen ist die Bestimmung von N unabhängig von der ersten Näherung des Perihels, welches aus der Gleichung **13.** zu bestimmen ist. Man findet den Werth N unmittelbar als Funktiou von k und h. Es ist:

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 p'^2 - \frac{1}{2}\,\frac{(p^2 - p_0^2)^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{(n - p_0^2)^2}{r^2}.$$

Für den Fall, dass die Grösse N bei der Bestimmung von ω mitberücksichtigt werden muss, kann übrigens nicht die Rede davon sein, dass deren Integration ebenso, wie es für die Störungsglieder der ersten Ordnung geschehen ist, ohne vorausgegangene Substitution der ersten Näherungen von k und h ausgeführt werde.

Um die Grösse N als Funktion von k und h darzustellen, muss man zu der Gleichung **12.** zurückkehren. Darin ist:

$$2z\left(\frac{p}{r}\right)^3 + \left(z\,\frac{p}{r}\,e\sin v\right)' = 2\left(\frac{p}{r}\right)^3(k\cos v + h\sin v) + \left(e\sin v\,(k\cos v + h\sin v)\right)' = \left(\frac{p}{r}\right)^3(p^2 - p_0^2 - e\,k).$$

Die Gleichung 12. geht desshalb über in:

$$\frac{n^2}{p^2} - p^2 + 2(p^2 - p_0^2 - e\,k) = \left(\frac{r}{p}\right)^2 (q + 2P) - \left(\frac{r}{p}\right)^4 p'^2 .$$

Man findet leicht die identische Gleichung:

$$n^2 - p^4 + 2p^2(p^2 - p_0^2) = n^2 - p_0^4 + (p^2 - p_0^2)^2.$$

Mit Rücksicht darauf schreibt man, um das Element n zu bestimmen, die Gleichung 12. vortheilhafter in der Form:

$$14. \qquad n^2 - p_0^4 = p^2\left(2\,ek + \left(\frac{r}{p}\right)^2 (q + 2P) - \left(\frac{r}{p}\right)^4 p'^2\right) - (p^2 - p_0^2)^2 .$$

Auf der rechten Seite finden sich nur zwei Glieder der ersten Ordnung; alle übrigen Glieder gehören der zweiten Ordnung an. Setzt man abkürzend:

$$\frac{p^2}{p_0^4}\left(ek + \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{2}q + P\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^4 p'^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)^2 = x,$$

so behält man die einfache Gleichung:

$$\frac{n^2}{p_0^4} - 1 = 2x, \qquad \text{oder} \qquad \frac{n}{p_0^2} = \sqrt{1 + 2x} .$$

Die binomische Entwicklung gibt:

$$\frac{n}{p_0^2} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 - \cdots$$

Indem man dies oben einsetzt, findet man, unter dem Beistande der identischen Gleichung:

$$(n - p_0^2)^2 = n^2 - p_0^4 - 2p_0^2(n - p_0^2),$$

den verlangten Werth:

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 p'^2 - \frac{1}{2}\frac{p_0^4}{r^2}\left(\left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)^2 - x^2 + x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{4}x^5 - \cdots\right).$$

Man hat oben gesehen, dass von den Werthen q, k und h jeder durch die Quadratur eines Ausdrucks bestimmt ist, welcher für den Fall, dass die Bahn des störenden Körpers eine ungestörte Ellipse ist, nur die vier gestörten Elemente $p\ \omega\ i\ \vartheta$ enthält. Die gleiche Eigenschaft besitzt der Werth n, welcher im Vorstehenden bestimmt worden ist. Nachdem man die aus den Gleichungen 9. 10. 11. 14. bestimmten Werthe $q\ k\ h\ n$ in die Störungsgleichung 13. eingesetzt hat, sind auch hier wieder die vier Grössen $p\ \omega\ i\ \vartheta$ die einzig vorkommenden gestörten Elemente.

§ 12. Ueber die der Zeit proportionalen Glieder in den Integralen der Störungsgleichungen.

Wenn man zur Integration der Störungsgleichungen schreitet, so ist vor Allem zu beachten, dass an die Form des Integrals gewisse Forderungen gestellt sind, welche nur dann erfüllt werden können, wenn man sich bei der Integration der Störungsglieder an ganz bestimmte Vorschriften hält. Durch die Integration der Störungsgleichungen sollen die Elemente unmittelbar als trigonometrische Funktion der Zeit dargestellt werden. Dies ist unerlässlich, damit dieselben für jeden noch so grossen Zeitraum brauchbar bleiben. Nur in den beiden Elementen ϑ und ω, durch welche Kreisbögen dargestellt sind, ist ein der Zeit proportionales Glied unvermeidlich. In der That wachsen diese beiden Elemente mit der Zeit ins Unbegrenzte, während die übrigen Elemente nur zwischen gewissen Grenzen variiren. Ferner soll der Coefficient des der Zeit proportionalen Gliedes in jedem der beiden Elemente ϑ und ω eine Beständige sein. Wollte man zugeben, dass dieser Coefficient veränderlich sei, so würden in allen Störungsgleichungen ohne Ausnahme die Glieder der zweiten und höheren Ordnung, welche durch die Variation dieses Coefficienten entstehen, die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Funktion enthalten, und es wären dann auch in den Integralen dieser Gleichungen solche Glieder unvermeidlich.

Unter den Störungsgliedern der ersten Ordnung nimmt in der Gleichung 13., durch welche das Element ω bestimmt wird, auch die Veränderliche $q_,$ eine Stelle ein, welche selbst durch die Integration der Gleichung 9. gefunden wird. Es ist aber nicht gestattet, um etwa die schon integrirten Glieder nicht einer zweiten Integration zu unterwerfen, vermittelst einer theilweisen Integration das genannte Störungsglied durch die Derivirte $q_,'$ zu ersetzen, deren Glieder durch die Gleichung 9. unmittelbar gegeben sind. Denn es würden dann in dem Integrale der Gleichung 13. Glieder zum Vorschein kommen, welche der oben ausgesprochenen Forderung nicht mehr genügen, da sie die Zeit auch ausserhalb der trigonometrischen Funktionen enthalten. Man ist daher genöthigt, bei der Bestimmung der ersten Näherung von ω den durch die Integration erzielten Werth $q_,$ einer abermaligen Integration zu unterwerfen.

Es ist schon oben darauf hingewiesen worden, dass die Gleichungen 10. und 11. die ersten Näherungen von k und h erst dann liefern können, nachdem man das Element $q_,$ bestimmt hat. Die genannten Gleichungen lassen übrigens noch eine bemerkenswerthe Umwandlung zu. In der Gleichung 10. kann man auf Grund einer theilweisen Integration das Element $q_,$ durch dessen Derivirte $q_,'$ ersetzen; in der Gleichung 11. aber wird $q_,$ jedenfalls mit beständigem Coefficienten übrig bleiben. Man würde, von dieser Umwandlung Gebrauch machend den Vortheil haben, dass die Grösse $q_,$ welche durch die Integration der Gleichung 9. bestimmt worden ist, nur in der Gleichung 11. einer weiteren Integration zu unterwerfen ist. Die Störungsgleichungen 10. und 11. haben die Form:

$$-k' = \frac{r}{p}\sin v\left(\Omega - r_,\frac{d\Omega}{dr_,} - a - q_, + P\right)$$

$$h' = \frac{r}{p}\cos v\left(\Omega - r_,\frac{d\Omega}{dr_,} - a - q_, + P\right).$$

Um die erwähnte Umwandlung anzubringen, bediene ich mich zweier Funktionen, deren Derivirten $\frac{r}{p}\sin v$ und $\frac{r}{p}\cos v$ sind. Es ist $\left(\frac{r^2}{p^2}\right)' = 2\frac{r}{p}e\sin v$. Daraus ergibt sich ohne Weiteres die Derivirte:

$$\left((1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1\right)' = 2(1-e^2)\frac{r}{p}e\sin v.$$

Auf Grund der identischen Gleichung:

$$(1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1 = \left(\frac{r}{p}\right)^2\left(1 - e^2 - \left(\frac{p}{r}\right)^2\right) = -e\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\left(\frac{p}{r}+1\right)\cos v + e\right)$$

kann man auch die folgende Derivirte anschreiben:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2\left[\left(\frac{p}{r}+1\right)\cos v + e\right]\right)' = -2(1-e^2)\frac{r}{p}\sin v.$$

Es ist ferner $\left(\frac{r}{p}\sin v\right)' = \cos v + e$. Daraus folgt zunächst:

$$\left(\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r}{p}\sin v\right)' = \left(1+\frac{r}{p}\right)(\cos v + e) + \frac{r}{p}\, e \sin^2 v.$$

Mit Rücksicht auf die identische Gleichung $1 + \frac{r}{p} = \frac{r}{p}(2 + e\cos v)$ erhält man alsdann die Derivirte:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin v\right)' = 2(1-e^2)\frac{r}{p}\cos v + 3e.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einer unbestimmten Veränderlichen ϱ, so gehen sie über in:

$$\left(\varrho\left(\frac{r}{p}\right)^2\left[\left(\frac{p}{r}+1\right)\cos v + e\right]\right)' = \varrho'\left(\frac{r}{p}\right)^2\left[\left(\frac{p}{r}+1\right)\cos v + e\right] - 2\varrho(1-e^2)\frac{r}{p}\sin v$$

$$\left(\varrho\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin v\right)' = \varrho'\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin v + 2\varrho(1-e^2)\frac{r}{p}\cos v + 3\varrho e.$$

Dies zur Richtschnur nehmend bediene ich mich der beiden Transformationen:

$$\tau = k + \frac{1}{2}\varrho\left(\frac{r}{p}\right)^2\left[\left(\frac{p}{r}+1\right)\cos v + e\right]$$

$$\sigma = h + \frac{1}{2}\varrho\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin v.$$

Ich differentiire dies, um alsdann die Derivirten k' und h' der Gleichungen 10. und 11. einzusetzen. Es entstehen die neuen Störungsgleichungen:

15. $$-\tau' = \frac{r}{p}\sin v\left(\Omega - r_{,}\frac{d\Omega}{dr_{,}} - a - q_{,} + \varrho(1-e^2) + P\right) - \frac{\varrho'}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2\left[\left(\frac{p}{r}+1\right)\cos v + e\right].$$

16. $$\sigma' = \frac{r}{p}\cos v\left(\Omega - r_{,}\frac{d\Omega}{dr_{,}} - a - q_{,} + \varrho(1-e^2) + P\right) + \frac{\varrho'}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin v + \frac{3}{2}\varrho e.$$

Nimmt man $\varrho(1-e^2) = a + q_{,}$, so kommt die Veränderliche $q_{,}$ nur noch in der letzteren Gleichung vor; denn in der ersteren Gleichung findet sich nur die Derivirte von $q_{,}$, welche durch die Gleichung 9. des § 10 unmittelbar gegeben ist. Es kann noch die Bemerkung beigefügt werden, dass die Veränderliche $q_{,}$ in der Gleichung 16. ebenso wie in der Gleichung 13. einen beständigen Coefficienten hat, so dass die einer zweiten Integration unterworfenen Glieder der ersten Näherung von σ mit den in der ersten Näherung von ω vorkommenden übereinstimmen.

Für's Erste mag es dahin gestellt sein, ob der Vortheil, welcher sich aus dem Umstande her-

leitet, dass die zweifache Integration in ihrem Vorkommen möglichst beschränkt sei, den Verlust an Einfachheit und Symmetrie aufzuwägen im Stande ist, welchen die Störungsgleichungen andererseits erleiden. Es wird aber in der Folge noch eine andere Veranlassung gegeben sein, auf die hier besprochene Transformation zurückzukommen.

Um auch die Gleichungen 6. und 7. des § 9, welche zur Bestimmung von p und p' dienen, der vorstehenden Transformation zu unterwerfen, schreibt man zunächst:

$$k \cos v + h \sin v = \tau \cos v + \sigma \sin v - \varrho \frac{r}{p}$$

$$-k \sin v + h \cos v = -\tau \sin v + \sigma \cos v + \frac{1}{2} \varrho \left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin v.$$

Wenn dies eingesetzt wird, so gehen die erwähnten Gleichungen über in:

17. $$p^2 - p_0^2 + 2 \varrho = 2 \frac{p}{r} (\tau \cos v + \sigma \sin v)$$

18. $$\left(\frac{r}{p}\right)^2 pp' = \frac{3}{2} \varrho \frac{r}{p} e \sin v - \frac{p}{r} (\tau \sin v - \sigma \cos v) - e \sin v (\tau \cos v + \sigma \sin v).$$

Aus der Beschaffenheit der Störungsglieder lässt sich im Voraus ein Schluss ziehen auf die Beschaffenheit der Integrale. In der Störungsfunktion kommen, nachdem man zum Behufe der Elimination der Veränderlichen r $r_,$ s von den Gleichungen:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v \qquad \frac{p_,}{r_,} = 1 + e_, \cos v_, \qquad s = \cos u \cos u_, + \cos J \sin u \sin u_,$$

Gebrauch gemacht hat, neben den Elementen p, $p_,$ und J noch die vier Veränderlichen v $v_,$ u $u_,$ vor. Was hiermit über die Beschaffenheit der Störungsfunktion ausgesagt ist, gilt fast ebenso auch für die Störungsgleichungen selbst. In dem ganzen Systeme der Störungsgleichungen, durch welche die Bewegung des gestörten Körpers bestimmt ist, gibt es keine, in welchen ausser den genannten Veränderlichen und den Derivirten p' und $p_,'$ noch andere Veränderliche vorkommen. Bei der Integration der Störungsglieder kommen aber immer nur die vier Winkelgrössen v $v_,$ u $u_,$ in Betracht, weil dann die erstgenannten Grössen, die Elemente p, $p_,$ und J, jedesmal als Beständige, und die Derivirten p' und $p_,'$ als verschwindend aufgefasst werden sollen.

Was im Uebrigen die Beschaffenheit der Störungsglieder betrifft, so zeigt es sich, nachdem man die Entwicklung der Störungsfunktion ausgeführt hat, dass drei Störungsgleichungen wesentlich verschieden sind von den drei übrigen. Bezeichnet man mit w und $w_,$ zwei lineare Funktionen jener vier Winkelgrössen v $v_,$ u $u_,$, deren Coefficienten als ganze Zahlen gedacht werden sollen, so bildet sich in der einen Hälfte der Störungsgleichungen jedes Glied, gleichgiltig, ob dasselbe der ersten Ordnung oder einer höheren Ordnung angehört, durch die Multiplikation von $\sin w$ mit $\cos w_,$. Dies Produkt führt aber, wenn es zum Behufe der Integration in lineare trigonometrische Funktionen aufgelöst wird, niemals zu einem beständigen Gliede. Das neue Glied zeigt sich jedesmal als sinus eines veränderlichen Winkels. Denkt man sich nämlich die vier Veränderlichen v $v_,$ u $u_,$ als Funktion von t entwickelt, so enthält jede derselben ein der Zeit proportionales Glied. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Coefficienten von t in diesen vier Gliedern unter sich kein gemeinschaftliches Maass haben. Es lässt sich daher keine lineare Funktion der vier Veränderlichen v $v_,$ u $u_,$ mit ganzzahligen Coefficienten aufstellen, in welcher sich die der Zeit proportionalen Glieder gegenseitig aufheben. Die Auflösung des Störungsgliedes in

lineare trigonometrische Funktionen könnte aber nur dann zu einem beständigen Gliede führen, wenn in der linearen Funktion der Veränderlichen $v\ v$, $u\ u$, die der Zeit proportionalen Glieder in ihrer Gesammtheit verschwinden, ohne dass zugleich die lineare Funktion selbst verschwindet. In Wirklichkeit werden diese Glieder nur dann verschwinden, wenn alle Coefficienten der Veränderlichen $v\ v$, $u\ u$, einzeln genommen gleich Null sind. In diesem Falle verschwindet aber die lineare Funktion selbst. Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass durch die Integration der Störungsgleichung 10., aus welcher sich das Element k bestimmt, keine der Zeit proportionalen Glieder entstehen. Die Störungsgleichung 10. hat diese Eigenschaft mit jenen beiden Störungsgleichungen gemein, aus welchen die Elemente q, und i bestimmt werden sollen.

In den übrigen drei Störungsgleichungen bildet sich jedes Glied durch die Multiplikation von $\cos w$ mit $\cos w_{,}$. Die Auflösung in lineare trigonometrische Funktionen gibt hier nicht jedesmal den cosinus eines veränderlichen Winkels. Für den Fall, dass alle Coefficienten der Veränderlichen $v\ v$, $u\ u$, in der linearen Funktion einzeln genommen verschwinden, hat man an der Stelle des neuen Gliedes eine beständige Grösse. Von solcher Beschaffenheit ist die Störungsgleichung 11., aus welcher das Element h bestimmt werden soll; ebenso auch die Gleichungen zur Bestimmung von ω und ϑ. Die Integration dieser drei Störungsgleichungen führt desshalb auf Glieder, welche der Zeit proportional sind. Wenn hiernach auch in dem Elemente h Glieder entstehen, welche der Zeit proportional sind, so widerstreitet dies unzweifelhaft der obigen Forderung, wonach solche Glieder nur in den Elementen ϑ und ω zugelassen sind. Man hat es einer merkwürdigen Eigenschaft der Störungsgleichung 11. zu verdanken, welche erst weiter unten besprochen werden kann, dass die darin vorkommenden beständigen Glieder, und in Folge dessen auch die der Zeit proportionalen Glieder des Elementes h, ausnahmslos fortgeschafft werden können.

§ 13. Die in den Integralen vorkommenden überzähligen willkürlichen Beständigen.

Wenn ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen integrirt werden soll, so kann das vollständige Integral durch n endliche Gleichungen von der Form $\alpha_n = c_n$ ausgedrückt werden, worin α_n eine bestimmte Funktion der Veränderlichen, und c_n eine willkürliche Beständige ist. Irgend eine dieser n Gleichungen kann aber auch durch eine willkürliche Funktion jener n veränderlichen Grössen $\alpha, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ersetzt werden. Man hat dann ein Integral aufgestellt, in welchem beliebig viele willkürliche Beständige vorkommen. Wenn die Integrationsmethode zu einem Systeme von Integralen führt, welche im Ganzen mehr als n willkürliche Beständige enthalten, so darf man über die überzähligen willkürlichen Beständigen frei verfügen. Die Zahl der unbestimmten Beständigen braucht nicht grösser zu sein als n, um die Forderungen der besonderen Aufgabe jederzeit erfüllen zu können. Es ist aber doch nicht gestattet, unter jenen willkürlichen Beständigen diejenigen, worüber man verfügen will, nach Belieben herauszugreifen. Es könnte sein, dass die Vollständigkeit des Integrals dann ungeachtet der noch übrigen n unbestimmten Beständigen eine Einbusse erlitte.

Die von mir angewendete Integrationsmethode führt zu überzähligen willkürlichen Beständigen. Man hat in den Integralen der drei Störungsgleichungen 9. 15. 16. neben den Integrationsbeständigen $a\ \tau_0\ \sigma_0$ die Excentricität e und den Parameter p_0 als unbestimmte Beständige eingeführt. Ausserdem kommt darin die willkürliche Beständige c vor, welche dem Integral der Gleichung $\frac{dv}{dt} = \left(\frac{p}{r}\right)^2$ entspricht. Indem man die Frage erörtert, in welcher Weise man über die drei überzähligen Beständigen am zweck-

mässigsten verfügen würde, bietet sich ein Hilfsmittel dar, durch welches die im vorigen § besprochene Schwierigkeit, die der Zeit proportionalen Glieder in dem Elemente h betreffend, gehoben werden kann.

In der That lässt sich eine der überzähligen Beständigen in solcher Weise bestimmen, dass die der Zeit proportionalen Glieder des Elementes h wegfallen. Dazu bedarf man des Beistandes der im vorigen § in den Gleichungen 10. und 11. ausgeführten Transformation. Man findet, dass sich in Folge dieser Transformation die Integrationsbeständige der Gleichung 8., welche mit dem Buchstaben a bezeichnet, in die Gleichungen 10. und 11. eingegangen ist, zu den beständigen Gliedern der Gleichung 11. addirt. Anstatt der Gleichungen 10. und 11. bediene man sich der transformirten Gleichungen 15. und 16., welche die willkürliche Veränderliche ϱ enthalten. Setzt man $\varrho\,(1 - e^2) = a$, so zeigen sich dieselben in der Form:

15. $$-\tau' = \frac{r}{p} \sin v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P\right)$$

16. $$\sigma' = \frac{r}{p} \cos v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{ae}{1 - e^2} \cdot$$

Die Grösse a tritt in einem beständigen Gliede der Gleichung 16. auf. Wenn C die Summe derjenigen beständigen Glieder bezeichnet, welche neben dem erwähnten von a abhängigen Gliede vorkommen, so bringt man alle beständigen Glieder der Gleichung 16. zum Verschwinden, indem man die überzählige Beständige a durch die Gleichung $C + \frac{3}{2} \cdot \frac{ae}{1 - e^2} = o$ bestimmt.

Nachdem man in dieser Weise über die überzählige Beständige a verfügt hat, muss der Parameter p_0 als Integrationsbeständige festgehalten werden. Denn aus der Gleichung 17. des vorigen §:

$$p^2 - p_0^2 + \frac{2a}{1 - e^2} = 2\frac{p}{r}(\tau \cos v + \sigma \sin v)$$

ersiebt man, dass die Integrationsbeständige p_0 zwar durch die Beständige a, nicht aber durch eine der Beständigen σ_0 und τ_0 ersetzt werden könnte.

Im Uebrigen kann leicht nachgewiesen werden, dass die Beständigen e und c einerseits, und die Beständigen σ_0 und τ_0 anderseits einander ersetzen. Man hat nämlich, um den Leitstrahl der ungestörten Ellipse zu bestimmen, die Gleichung: $rr'' = \frac{p_0^4}{r^2} - \frac{p_0^3}{r}$.

Daraus folgt $\frac{p_0}{r} = 1 + e \cos v$, wo v als Funktion von t gegeben ist, indem man die folgenden Gleichungen anschreibt:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon - e \sin \varepsilon = (t - c)(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Die beiden Integrationsbeständigen der obigen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind bekanntlich e und c. Bei der Bestimmung der gestörten Bahn tritt an deren Stelle die folgende:

$$rr'' = \frac{n^2}{r^2} = \frac{p_0^3}{r} + r \frac{d\Omega}{dr}.$$

Das Integral dieser Gleichung enthält neben den willkürlichen Beständigen e und c noch die beiden Integrationsbeständigen σ_0 und τ_0. Man hat nämlich dies Integral in der Form $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$ vor-

ausgesetzt, wo e und c von vorn herein als unbestimmte Beständige gedacht sind. In Folge dessen hat sich zur Bestimmung des Parameters die Gleichung 17:

$$p^2 - p_0^2 + \frac{2a}{1-e^2} = 2\frac{p}{r}(\tau \cos v + \sigma \sin v)$$

ergeben; und zur Bestimmung der Veränderlichen τ und σ sind die Gleichungen 15. und 16. aufgestellt worden, welche ihrerseits die Integrationsbeständigen σ_0 und τ_0 herbeiführen. Nichts hindert, denselben Weg zu der Bestimmung der ungestörten Bahn einzuschlagen. Aus dem Integral der lebendigen Kraft ergibt sich, wenn $q = o$ und $q_{,} = o$ gesetzt wird, wogen $\Omega = o$ auch $a = o$. Ferner findet man die ersten Näherungen $\tau = \tau_0$ und $\sigma = \sigma_0$. Die erste Näherung des Parameters bestimmt sich demnach aus der Gleichung:

$$p^2 - p_0^2 = 2\frac{p}{r}(\tau_0 \cos v + \sigma_0 \sin v),$$

und es ist ersichtlich, dass τ_0 und σ_0 die Stellvertreter jener Integrationsbeständigen e und c sind.

Uebrigens dürfte man über die Beständigen e und c doch nicht ohne alle Rücksicht verfügen. Denn die Convergenz der Integrale, welche den Gleichungen 15. und 16. entsprechen, ist an die Bedingung geknüpft, dass P eine kleine Grösse der zweiten Ordnung sei; und hiermit ist denn zugleich die Forderung ausgesprochen, dass die Beständigen e und c so gewählt sein müssen, wie sie sich unter der Annahme einer ungestörten Ellipse der wirklichen Bahn ungefähr anpassen würden. An den in solcher Weise gewählten Werthen e und c aber dürfte man nachträglich beliebige Aenderungen anbringen, wenn deren Betrag die Variationsgrenzen der Elemente nicht überschreitet. Unter dieser Beschränkung würden die willkürlich gewählten Beständigen e und c der Convergenz der Integrale kein Hinderniss in den Weg legen.

Es ist leicht zu sehen, dass ins Besondere die Integrationsbeständigen σ_0 und c einander ersetzen. Die Bahn der ungestörten elliptischen Bewegung ist durch die Gleichung $\frac{p_0}{r} = 1 + e\cos v$ bestimmt, wo $p_0\, e$ und c in jedem gegebenen Falle bestimmte Zahlenwerthe sind. Wollte man die Beständige c um einen kleinen, wenn auch von t unabhängigen Betrag δc ändern, so dass sich aus der vorliegenden Gleichung doch wieder der nämliche Leitstrahl r ergibt, so müsste der beständige Parameter p_0 durch einen veränderlichen Parameter p ersetzt werden, oder es müsste derselbe eine veränderliche Variation erhalten. Dieser veränderliche Parameter fällt selbstverständlich mit demjenigen Werthe p zusammen, welcher vorhin unter der Annahme, dass die Elemente e und c unbestimmte Grössen seien, für die ungestörte Ellipse aufgestellt worden ist. Es kommt nur darauf an, dass man in diesem Werthe p die Beständigen $p_0\ \sigma_0\ \tau_0$ angemessen bestimme. Man schreibe die Gleichung der Ellipse in der folgenden Form:

$$p^2 = r^2(1 + e\cos v)^2.$$

Daraus ergibt sich die Variation des Parameters nach c:

$$\delta(p^2) = -2r^2(1 + e\cos v)\, e \sin v \frac{dv}{dc}\, \delta c.$$

Es ist $-\frac{dv}{dc} = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{p}{r}\right)^2$. Man hat desshalb auch:

$$\delta(p^2) = 2p^2\, \delta c \frac{p}{r}\, e \sin v.$$

Da nun $p^2 e \delta e$ in der ersten Näherung einer Beständigen gleichgesetzt werden darf, so ist die Variation $\delta(p^2)$ identisch mit dem zweiten Gliede rechts der Gleichung:

$$p^2 - p_0^2 = 2\,\frac{p}{r}\,(\tau_0 \cos v + \sigma_0 \sin v)\,.$$

Es ist hiernach jeder Zweifel gehoben, dass sich die willkürlichen Beständigen σ_0 und c einander ersetzen, nnd dass also die eine von beiden willkürlich bleiben muss, sobald mau über die andere Verfügung getroffen hat. Man hat einen Grund, jedenfalls $\sigma_0 = o$ zu setzen. Denn man findet, dass sich alle Glieder des Ausdrucks $\tau \cos v + \sigma \sin v$ als cosinus, und alle Glieder des Ausdrucks $\tau \sin v - \sigma \cos v$ als sinus darstellen. Wollte man σ_0 nicht gleich Null setzen, so nähme das einzige mit σ_0 multiplicirte Glied neben den übrigen Gliedern dieser Ausdrücke, mit Rücksicht auf die vorerwähnte Eigenschaft derselben eine Ausnahmsstellung eiu, welche der Integratiou der Störungsgleichungen zum grossen Hinderniss gereichen würde.

Da also c und σ_0 eiuander ersetzen, so versteht es sich, dass auch die Beständigen e und τ_0 in der nämlichen Beziehung zu einander stehen. Wenn man die Gleichung der Ellipse

$$p^2 = r^2 (1 + e \cos v)^2$$

nach e variirt, unter der Voraussetzung, dass einem bestimmten t jedenfalls der nämliche Leitstrahl entspreche, so erhält man die Variation des Parameters:

$$\delta(p^2) = 2\,r^2 (1 + e \cos v)\left(\cos v - e \sin v\,\frac{dv}{de}\right)\delta e\,.$$

Die Derivirte $\frac{dv}{de}$ enthält, wenn die Veränderliche v als Funktion von e aus den Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \varepsilon - e \sin \varepsilon = (t - c)(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}$$

hergeleitet wird, ein der Zeit proportionales Glied. Dies Glied der Derivirten $\frac{dv}{de}$ lässt sich aber durch eine andere Wahl der Beständigen l, welche im § 8 der Einheit gleichgesetzt worden ist, vermeiden. Nimmt man in der allgemeineren Gleichung:

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = l\,(t - c)(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}$$

die Beständige l als Funktion von e, indem man $l(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} = 1$ setzt, so erhält man durch die Differentiation nach e die beiden Gleichungen:

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{de}{1 - e^2} - \frac{d\varepsilon}{\sin \varepsilon}\,, \qquad (1 - e \cos \varepsilon)\, d\varepsilon = \sin \varepsilon\, de\,,$$

von denen die letztere, mit Rücksicht auf die Gleichung $\frac{p}{r}(1 - e \cos \varepsilon) = 1 - e^2$, übergeht in:

$$\frac{d\varepsilon}{\sin \varepsilon} = \frac{p}{r}\,\frac{de}{1 - e^2}\,.$$

Durch die Elimination von $d\varepsilon$ erhält man den Werth:

$$\frac{dv}{de} = \left(\frac{p}{r} + 1\right) \frac{\sin v}{1 - e^2}.$$

Die Snbstitution von $\frac{dv}{de}$ in die obige Variation des Parameters gibt:

$$\delta(p^2) = \frac{2\, r\, p\, \delta e}{1 - e^2} \left((1 - e^2) \cos v - \left(\frac{p}{r} + 1\right) e \sin {}^2 e \right),$$

und durch Reduktion findet man den einfacheren Werth:

$$\delta(p^2) = \frac{2\, p^2\, \delta e}{1 - e^2} \left(-2e + \frac{p}{r} \cos v \right).$$

Eine weitere Vereinfachung erfährt diese Gleichung, wenn man anstatt der Variation des Parameters die der grossen Achse $a = \frac{p}{1 - e^2}$ aufstellt. Man findet:

$$\delta(a^2) = \frac{2\, a^2\, \delta e}{1 - e^2} \frac{p}{r} \cos v.$$

Indem man schliesslich dio Grösse $\frac{p^2 \delta e}{1 - e^2}$ einer Beständigen gleichsetzt, gibt man der nach e genommenen Variation des Parameters, soweit dieselbe veränderlich ist, diejenige Form, welche mit dem ersten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung:

$$p^2 - p_0^2 = 2 \frac{p}{r} (\tau_0 \cos v + e_0 \sin v)$$

identisch ist. Man gelangt zu dem Schlusse, dass dio Beständigen τ_0 und e des vollständigen Integrals einander ersetzen.

Man hat übrigens zunächst keinen Grund, anstatt der einen oder der andern Beständigen einen bestimmten Werth zu setzen. Es möchte sich vielmehr empfehlen, neben der Beständigen e anch die andere τ_0 willkürlich zu lassen. Gewisse Forderungen des Problems, welche auf die Bedürfnisse des besonderen Falles Bezug haben, lassen sich leicht erfüllen, so lange man über die eine oder die andere Beständige verfügen kann.

§ 14. Das System der Störungsgleichungen in dem Problem der drei Körper.

Um die Uebersicht über die zu benutzenden Störungsgleichungen zu haben, schreibt man zunächst die Gleichung 9. und die Gleichungen 15. und 16. des vorigen §:

I. $$\frac{1}{2} q_{,}' = \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du_{,}} \frac{n_{,}}{r_{,}^3} + \frac{d\Omega}{dr_{,}} r_{,}'$$

II. $$-\tau' = \frac{r}{p} \sin v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P \right)$$

III. $$\sigma' = \frac{r}{p} \cos v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P \right) + \frac{3}{2} \frac{ae}{1 - e^2}.$$

Nach erfolgter Integration erhält man den Parameter aus der Gleichung:

$$p^2 - p_0^2 + \frac{2a}{1-e^2} = 2\frac{p}{r}(\tau \cos v + \sigma \sin v).$$

Zur Bestimmung des Perihels hat man die Störungsgleichnng 13. Setzt man darin an die Stelle von k und h die neuen Elemente τ und σ, welche im § 12 auch in dio Störungsgleichungen 10. und 11 eingeführt worden sind, so findet man, dass die Grösse ϱ in der transformirten Gleichung nicht vorkommt, dass man also, um die Gleichung 13. zu transformiren, ohne Weiteres τ gegen k und σ gegen h vertauschen darf. Die Störungsgleichung schreibt sich demnach:

IV.
$$-p_0^2\left(\omega' - 2\sin^2\frac{i}{2}\,\vartheta'\right) = \left(2\frac{p}{r}(\tau \sin v - \sigma \cos v) - e \sin v(\tau \cos v + \sigma \sin v)\right)'$$
$$+\Omega - 2r_{,}\frac{d\Omega}{dr_{,}} - \frac{3}{2}(q_{,} + a) + P + N.$$

Zur Bestimmung von Knoten und Neigung der Bahn hat man die Gleichungen des § 5:

V.
$$\frac{i'}{\sin i} = -\frac{c}{nn_{,}}\cos u \sin u_{,}\frac{d\Omega}{ds}$$

VI.
$$\vartheta' = -\frac{c}{nn_{,}}\sin u \sin u_{,}\frac{d\Omega}{ds}.$$

Die in die Gleichungen II. III. IV. aufgenommenen Abkürzungen sind:

$$P = \frac{1}{2}\frac{p}{r}p_0^2\left(3y^2 - 5y^3 + \frac{35}{4}y^4 - \frac{63}{4}y^5 + \cdots\right)$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 p'^2 - \frac{1}{2}\frac{p_0^4}{r^2}\left(4y^2 - x^2 + x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{4}x^5 - \cdots\right),$$

wo noch $y = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)$ einzusetzen ist, nnd

$$x = \frac{p^2}{p_0^4}\left(ek + \left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\frac{1}{2}q + P\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^4 p'^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)^2.$$

In der letzteren Gleichung hringe man $q_{,}$ an die Stelle von q vermittelst des Integrals der lebendigen Kraft:

$$q + q_{,} + a = 2\Omega;$$

und zur Elimination von k bediene man sich, nachdem man $\varrho(1-e^2) = a$ gesetzt hat, der Gleichnng des § 12:

$$ek = e\tau - \frac{1}{2}\frac{a}{1-e^2} + \frac{a}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2.$$

Der Werth x nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$x = \frac{p^2}{p_0^4}\left(e\tau - \frac{1}{2}\frac{a}{1-e^2} + \left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\Omega - \frac{1}{2}q_{,} + P\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^4 p'^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)^2.$$

Wiewohl das Element p in der Gleichung 14. des § 11:

$$n^2 - p_0^4 = p^2\left(2\,ck + \left(\frac{r}{p}\right)^2 (q + 2\,P) - \left(\frac{r}{p}\right)^4 p^2\right) - (p^2 - p_0^2)^2$$

eine Stelle einnimmt, so kann dasselbe doch nicht aus dieser Gleichung berechnet werden. Was diesem Vorhaben entgegenstände, ist der Umstand, dass der Coefficient von p^2 eine kleine Grösse der ersten Ordnung ist. Indem man alle Störungsglieder der zweiten Ordnung vernachlässigt, behält man eine Gleichung, worin nur noch die drei Elemente $n\,k\,q$ vorkommen. Diese letzteren gehören in jene besondere Gruppe von Elementen, in welchen, der eigenthümlichen Beschaffenheit der Störungsgleichungen zufolge, die der Zeit proportionalen Glieder von vorn herein fern bleiben, während das Element p diese Eigenschaft bekanntlich nicht besitzt. Aber auch zur Berechnung von k würde sich die Gleichung 14. nicht eignen, weil diese Veränderliche den kleinen Faktor e hat. Es bleibt also nur die Wahl zwischen den beiden Elementen n und q. Es ist schon oben, im § 9 nachgewiesen worden, dass es den Vorzug hat, die Gleichung 14. zur Berechnung von n zu verwenden. Auf Grund der jetzt vorliegenden Resultate kann man sich leicht überzeugen, dass die Störungsgleichungen eine nicht vortheilhafte Umwandlung erfahren würden, wenn man an die Stelle von q das ursprüngliche Element n wieder einsetzen wollte. Insbesondere würde sich dann die Anzahl der in den Quadraturen vorkommenden veränderlichen Elemente nicht mehr auf vier beschränken, weil zu den vier Elementen $p\,\omega\,i\,\vartheta$ noch das fünfte p' hinzukäme.

Der Fall, dass die Bahn des störenden Körpers als eine ungestörte Ellipse angesehen werden darf, gibt eine wesentliche Vereinfachung des Problems, insofern als durch die vorliegenden Gleichungen die Bahn des gestörten Körpers dann vollständig bestimmt ist. Wenn aber die Bahn des störenden Körpers gleichfalls eine gestörte Ellipse ist, so hat man, um die beiden Bahnen bestimmen zu können, drei weitere Störungsgleichungen zu berücksichtigen, welche den obigen Gleichungen II. III. IV. entsprechend sind.

Um den Parameter des störenden Körpers zu bestimmen, setzt man, von der Gleichung:

$$r_, r_,'' = \frac{n_,^2}{r_,^2} - \frac{\lambda^2 p_0^3}{r_,} + r_, \frac{d\Omega}{dr_,}$$

ausgehend, abkürzend $\left(\frac{r_,}{p_,}\right)^2 (p_,^2 - p_{0,}^2) = 2z_,$. Mit Rücksicht auf die schon oben angewendete Abkürzung:

$$r_,'^2 + \frac{n_,^2}{r_,^2} - 2\,\frac{\lambda^2 p_0^3}{r_,} + \lambda^2 p_0^2 (1 - e_,^2) = q,$$

führt man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung über in:

$$z_,'' + \lambda^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2 z_, = q_, + r_, \frac{d\Omega}{dr_,} + P_,,$$

wo noch die weitere Abkürzung:

$$P_, = \frac{\lambda^2}{2} \frac{p_,}{r_,} \left(p_,^2 + \frac{2\,p_0^3}{p_,} - 3p_0^2\right)$$

eingeführt ist. Aus der vorliegenden Differentialgleichung der zweiten Ordnung folgt: $z_, = \frac{r_,}{p_,} (k_, \cos v_, + h_, \sin v_,)$, oder auch:

$$p_,^2 - p_0^2 = 2\,\frac{p_,}{r_,} (k_, \cos v_, + h_, \sin v_,);$$

Zur Bestimmung von $k_{,}$ und $h_{,}$ findet man ferner die beiden Gleichungen:

II.′ $$-\lambda k_{,}' = \frac{r_{,}}{p_{,}} \sin v_{,} \left(r_{,} \frac{d\Omega}{dr} + q_{,} + P_{,} \right)$$

III.′ $$\lambda h_{,}' = \frac{r_{,}}{p_{,}} \cos v_{,} \left(r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} + q_{,} + P_{,} \right).$$

Die der Zeit proportionalen Glieder, welche sich durch die Integration der Gleichung III.′ ergeben, sind in derselben Weise zu beseitigen, wie oben die bei der Integration der Gleichung III. entstehenden. Dort hat man zu diesem Zwecke die Integrationsbeständige in dem Integrale der Gleichung 8. verwendet, welche der Veränderlichen q beigefügt werden darf, in dem Weitern aber, nachdem man die Veränderliche q vermittelst des Integrals der lebendigen Kraft eliminirt hatte, der Integrationsbeständigen a einverleibt worden ist. In gleicher Weise findet hier die in dem Integrale der Gleichung 9. neben $q_{,}$ vorkommende Integrationsbeständige eine Verwendung.

Um auch das Perihel des störenden Körpers zu bestimmen, findet man die Gleichung:

IV.′ $$-\lambda p_{0}^{2} \left(\omega_{,}' - 2 \sin^{2} \frac{i_{,}}{2} \vartheta' \right) = \lambda \left(2 \frac{p_{,}}{r_{,}} (k_{,} \sin v_{,} - h_{,} \cos v_{,}) - e_{,} \sin v_{,} (k_{,} \cos v_{,} + h_{,} \sin v_{,}) \right)' + 2 r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} + \frac{3}{2} q_{,} + P_{,} + N_{,} \, ,$$

indem man sich einer weiteren Abkürzung bedient:

$$N_{,} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{,}}{p_{,}} \right)^{2} p_{,}'^{2} - \frac{\lambda^{2}}{2} \frac{(p_{,}^{2} - p_{0}^{2})^{2}}{r_{,}^{2}} + \frac{1}{2} \frac{(n_{,} - \lambda p_{0}^{2})^{2}}{r_{,}^{2}} ,$$

und zur Bestimmung von $n_{,}$ die folgende Gleichung anschreibt:

14.′ $$n_{,}^{2} - \lambda^{2} p_{0}^{4} = p_{,}^{2} \left(2 \lambda^{2} e_{,} k_{,} + \left(\frac{r_{,}}{p_{,}} \right)^{2} (q_{,} + 2 P_{,}) \right) - \left(\frac{r_{,}}{p_{,}} \right)^{4} p_{,}^{2} p_{,}'^{2} - \lambda^{2} (p_{,}^{2} - p_{0}^{2})^{2} \, .$$

Der schon vorhin besprochene Fall, dass die Bahn des störenden Körpers als eine ungestörte Ellipse angesehen werden darf, ist an die Bedingung geknüpft, dass der Bruchwerth $\left(\frac{r}{r_{,}} \right)^{2}$ neben der Einheit verschwinde. Denn wenn $\left(\frac{r}{r_{,}} \right)^{2} = o$ gesetzt werden darf, so ist auch $\left(\frac{p}{p_{,}} \right)^{2} = o$. Aus der letzteren Gleichung folgt aber, dass auch $k_{,} = o$ und $h_{,} = o$ ist. Man kann aus den Gleichungen II.′ und III.′ leicht ersehen, dass diese beiden Veränderlichen in dem Werthe von $p_{,}^{2}$ gleichzeitig mit dem Verhältnisse $\left(\frac{p}{p_{,}} \right)^{2}$ verschwinden. Es folgt also, dass der Parameter $p_{,}$ als eine Beständige zu betrachten ist. In gleicher Weise gelangt man zu dem Schlusse, dass die Gleichung IV.′ in die einfache $\omega_{,}' = o$ übergeht, wonach auch $\omega_{,}$ eine Beständige ist. Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass dann von denjenigen Gliedern der Veränderlichen $\omega_{,}$ Umgang genommen ist, welche der Zeit proportional sind, und welche für einen grossen Zeitraum einen immerhin merklichen Betrag liefern können.

Im § 8 sind die Gleichungen $n_{0} = p_{0}^{2}$ und $n_{0,} = \lambda p_{0,}^{2}$ aufgestellt worden. In Folge dessen darf man in dem vorliegenden Falle auch $\frac{n}{n_{,}} = o$ setzen. Es folgt dann aus den beiden Flächenintegralen:

$$n \sin i + n_{,} \sin i_{,} = o$$
$$n \cos i + n_{,} \cos i_{,} = c,$$

dass $i_{\prime} = o$ und $n_{\prime} = c$ ist. Diese weitere aus der Annahme einer vom störenden Körper beschriebenen ungestörten Ellipse hervorgehende Vereinfachung lässt sich leicht geometrisch auslegen. Aus $i_{\prime} = o$ folgt nämlich, dass die unveränderliche Ebene, welche als Ebene des Pols angenommen worden ist, mit derjenigen Ebene zusammenfällt, in welcher der störende Körper seine Bahn beschreibt.

Wenn die Bedingung $\left(\frac{r}{r_{\prime}}\right)^2 + 1 = 1$ erfüllt ist, so lässt sich dies auf zwei verschiedene Ursachen zurückführen. Es seien r_0 und $r_{0\prime}$ die Abstände der beiden sich störenden Körper von dem Centralkörper. Nach § 2 findet man, wenn dort $\varepsilon = o$ gesetzt wird.

$$\left(\frac{r}{r_{\prime}}\right)^2 = \frac{m(1 + m + m_{\prime})}{m_{\prime}(1 + m)^2}\left(\frac{r_0}{r_{0\prime}}\right)^2.$$

In der Theorie des Mondes darf die Sonnenbahn als eine ungestörte Ellipse angesehen werden, hauptsächlich desshalb, weil das Verhältniss jener Abstände $\frac{r_0}{r_{0\prime}}$ den kleinen Bruchwerth $\frac{1}{400}$ darstellt. Denn der von den Massen abhängige Faktor in dem Werthe $\frac{r}{r_{\prime}}$ ist beiläufig $\frac{1}{9}$. In der Theorie der Planetenstörungen ist in vielen Fällen eine ungestörte Ellipse des störenden Körpers zulässig, weil das Verhältniss $\frac{m}{m_{\prime}}$ der beiden Planetenmassen zu einander einen hinreichend kleinen Bruchwerth darstellt.

Die Störungsgleichung V. ist nur für den so eben besprochenen Fall zu gebrauchen. In dem allgemeinen Problem der drei Körper tritt eine andere Gleichung an deren Stelle, weil es in dem Sinne der Analysis liegt, die Neigung der Ebene des gestörten Körpers zu der des störenden zu bestimmen, welche letztere dann nicht mehr mit der Ebene des Pols zusammen fällt. Bezeichnet man den gesuchten Winkel mit $J = i - i_{\prime}$, so findet man mit Rücksicht auf die beiden Flächenintegrale:

$$n_{\prime} \sin J = c \sin i$$
$$- n \sin J = c \sin i_{\prime}\,.$$

die neue Störungsgleichung:

V: $$\frac{J'}{\sin J} = -\left(\frac{\cos u \sin u_{\prime}}{n} + \frac{\cos u_{\prime} \sin u}{n_{\prime}}\right)\frac{dU}{ds}.$$

Nachdem man den Winkel J daraus bestimmt hat, kann man auch die Winkel i und $i_{\prime}$ auf Grund der beiden vorstehenden Flächenintegrale berechnen.

Acht Störungsgleichungen sind es, welche zur Bestimmung der veränderlichen Elemente ausreichen, weil vier Integrale des Problems in endlicher Form vorliegen. Ich habe hier neun Störungsgleichungen aufgestellt, in der Voraussetzung, dass man von dem einen der beiden obigen Flächenintegrale keinen Gebrauch machen wolle. Insofern es nun gelungen ist, alle Elemente durch Quadraturen darzustellen, kann es in der That von keiner grossen Bedeutung sein, dass die Anzahl dieser Quadraturen möglichst vermindert werde. Wichtiger ist es, dass die Anzahl der unter dem Integralzeichen vorkommenden veränderlichen Elemente möglichst beschränkt sei. In allen obigen Quadraturen findet sich ausser den fünf Elementen p $p_{\prime}$ J, $\omega - \vartheta$, $\omega_{\prime} - \vartheta$, welche auch schon in der Störungsfunktion vorkommen, nur noch ein weiteres Element. Der Werth der Derivirten $p_{\prime}'$ kann offenbar erst dann aufgestellt werden, nachdem man die Gleichungen I. II'. III'. integrirt hat. Da aber diese Derivirte auch schon in der Gleichung I. vorkommt, so versteht es sich, dass dieselbe gleichfalls zu jenen veränderlichen Elementen zählt, welche unter dem Integralzeichen eine Stelle einnehmen. Welchen Gebrauch man auch immer von jenem unbenutzt

gebliebenen Flächenintegrale machen wollte, um die neunte Störungsgleichung streichen zu können, man würde jedesmal den genannten sechs veränderlichen Elementen noch ein siebentes hinzufügen. Ein Beispiel dazu gibt die nachfolgende Untersuchung.

Wenn man sowohl dem einen als dem andern der beiden obigen Flächenintegrale eine Verwendung geben will, so geschieht dies am vortheilhaftesten in der Weise, dass man die Störungsgleichung I., aus welcher die Veränderliche $q_,$ bestimmt werden soll, in dem obigen Systeme streicht. Man hat gesehen, dass die ersten Näherungen der Elemente nicht frei sind von zweifachen Quadraturen. Die Schuld davon trägt die Veränderliche $q_,$, welche unter dem Integralzeichen vorkommend selbst nur durch eine Quadratur zu erlangen ist. Mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft $q + q_, = 2\,\Omega - a$ hat man die Veränderliche q eliminirt, welche sonst gleichfalls unter dem Integralzeichen vorkommen würde. Man hat es vorgezogen, von jenen beiden die Veränderliche $q_,$ beizubehalten, weil deren Werth den Faktor λ hat, welcher nach der Voraussetzung einen kleinen Bruchwerth darstellt. Indem man neben dem Integral der lebendigen Kraft gleichzeitig jene beiden Flächenintegrale zu Hilfe nimmt, kann man den weiteren Vortheil erzielen, dass an die Stelle von $q_,$ andere Integrale treten, welche neben dem Faktor λ auch noch einen der beiden Faktoren e und $e_,$ bei sich haben. In den meisten Störungsaufgaben sind die Produkte $\lambda\, e$ und $\lambda\, e_,$ so kleine Bruchtheile, dass man die damit multiplicirten Integrale füglich zu den Störungsgliedern der zweiten Ordnung rechnen kann. In solchen Fällen ist man einigermassen berechtigt zu behaupten, die ersten Näherungen der Elemente seien durch einfache Quadraturen zu Stande gebracht.

Aus den beiden obigen Flächenintegralen bildet man in der angegebenen Absicht die folgende Gleichung:

$$n^2 + n_,^2 + 2\,n n_, \cos J = c^2 .$$

Man hat hier die Veränderlichen n und $n_,$ zu eliminiren mittels der Gleichungen:

14. $$n^2 - p_0^4 = p^2\left(2\,ek + \left(\frac{r}{p}\right)^2 (2\,\Omega - a - q_, + 2\,P)\right) - \left(\frac{r}{p}\right)^4 p^2 p'^2 - (p^2 - p_0^2)^2$$

14.' $$n_,^2 - \lambda^2 p_0^4 = p_,^2\left(2\,\lambda^2 e_, k_, + \left(\frac{r_,}{p_,}\right)^2 (q_, + 2\,P_,)\right) - \left(\frac{r_,}{p_,}\right)^4 p_,^2 p_,'^2 - \lambda^2 (p_,^2 - p_0^2)^2.$$

Die Veränderlichen k und $k_,$ sind zwar selbst Doppelintegrale; unterwirft man dieselben aber der Transformation des § 12, indem man:

$$ek - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 - \frac{1}{1-e^2}\right)(a + q_,) = e\,\tau$$

$$\lambda e_, k_, + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{r_,}{p_,}\right)^2 - \frac{1}{1-e_,^2}\right)\frac{q_,}{\lambda} = e_, \tau_,$$

setzt, so treten an deren Stelle zwei andere Veränderliche τ und $\tau_,$ auf, welche durch einfache Integrale ausgedrückt sind. Man behält die Gleichungen:

$$n^2 - p_0^4 = p^2\left(2\,e\,\tau - \frac{a + q_,}{1 - e^2} + 2\left(\frac{r}{p}\right)^2 (\Omega + P)\right) - \left(\frac{r}{p}\right)^4 p^2 p'^2 - (p^2 - p_0^2)^2$$

$$n_,^2 - \lambda^2 p_0^4 = p_,^2\left(2\,\lambda\, e_, \tau_, + \frac{q_,}{1 - e_,^2} + 2\left(\frac{r_,}{p_,}\right)^2 P\right) - \left(\frac{r_,}{p_,}\right)^4 p_,^2 p_,'^2 - \lambda^2 (p_,^2 - p_0^2)^2 .$$

Aus diesen findet man die Werthe:

$$n = p_0^2 + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \left(e\tau - \frac{1}{2}\,\frac{a + q_,}{1 - e^2} + \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Omega\right) + Q$$

$$n_, = \lambda\, p_0^2 + \left(\frac{p_,}{p_0}\right)^2 \left(e_, \tau_, + \frac{1}{2\lambda}\,\frac{q_,}{1 - e_,^2}\right) + Q_,$$

wo Q und $Q_,$ nur Glieder der zweiten und höheren Ordnung enthalten. Man setze diese Werthe n und $n_,$ in das obige Flächenintegral ein, und man kann aus der neuen Gleichung die Veränderliche $q_,$ bestimmen. Man findet, der oben aufgestellten Behauptung entsprechend, dass der Werth $q_,$ eine lineare Funktion der beiden Integrale $\lambda e\tau$ und $\lambda e_,\tau_,$ darstellt.

Wenn man dieser Darstellungsweise der Veränderlichen $q_,$ Etwas vorzuwerfen hätte, so könnte es etwa dies sein, dass unter den Gliedern der zweiten Ordnung jetzt gleichzeitig die beiden Veränderlichen p' und $p_,'$ vorkommen, während der aus der Gleichung I. hergeleitete Werth $q_,$ nur die letztere Veränderliche $p_,'$ enthält. Es steht indessen Nichts im Wege, bei der Darstellung des Elementes p' an die Stelle der darin vorkommenden Veränderlichen $q_,$ jenen andern der Störungsgleichung I. entnommenen Werth zu setzen. Nachdem dies geschehen ist, enthält der neue Werth $q_,$ doch wieder nur die sechs veränderlichen Elemente p $p_,$ J, $\omega - \vartheta$, $\omega_,' - \vartheta$ und $p_,'$, ohne dass der obenerwähnte Vortheil verloren geht, welcher Veranlassung gewesen ist, die Flächenintegrale zur Darstellung des Werthes $q_,$ zu verwenden.

Zum Behufe der Substitution von n und $n_,$ kann man das Flächenintegral in der folgenden Form schreiben:

$$n \cos J + n_, = \sqrt{c^2 - n^2 \sin^2 J}.$$

Für jenen Fall, dass die Bahn des störenden Körpers als eine ungestörte Ellipse angesehen werden darf, gestaltet sich die Rechnung einfacher. Man hat schon oben gefunden, dass dann der Werth der Integrationsbeständigen $c = n_,$ ist, und dass der Quotient $\frac{n}{n_,} = o$ gesetzt werden darf. Es verschwindet desshalb die Grösse $n^2 \sin^2 J$ neben c^2. Man behält, da $J = i$ ist, das Flächenintegral:

$$n \cos i + n_, = c.$$

Da ferner $p_, = p_0$, und in Folge dessen $Q_, = o$ gesetzt werden darf, so entsteht durch die Elimination von n und $n_,$ die Gleichung:

$$c - \lambda\, p_,^2 = e_, \tau_, + \frac{1}{2\lambda}\,\frac{q_,}{1 - e_,^2} + p_0^2 \cos i + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \cos i \left(e\tau - \frac{1}{2}\,\frac{a + q_,}{1 - e^2} + \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Omega\right) + Q \cos i.$$

Aus derselben wird alsdann der folgende Werth $q_,$ hergeleitet:

19. $$\left(\frac{1}{1 - e_,^2} - \frac{\lambda}{1 - e^2}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \cos i\right)\frac{q_,}{2\lambda} = c - \lambda\, p_,^2 - e_, \tau_, - p_0^2 \cos i - \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \cos i \left(e\tau - \frac{1}{2}\,\frac{a}{1 - e^2} + \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Omega\right) - Q \cos i.$$

Die Störungstheorie stellt sich die Aufgabe, die Bahn zu bestimmen, welche ein Weltkörper unter dem Einflusse aller übrigen Weltkörper beschreibt. Es wird oftmals so angenommen, und in der besonderen Beschaffenheit des Planetensystems hat es seine Begründung, dass diese allgemeine Aufgabe in dem Problem der drei Körper ihre Lösung finde. Insofern die wirklichen Bahnen nur geringe Abweichung von ungestörten Ellipsen zeigen, ist es in der That gestattet, diejenigen Störungen, welche

die Bahn eines Körpers durch jeden der übrigen Körper einzeln genommen erleidet, gesondert zu bestimmen, um schliesslich die Summe aller dieser Störungen zu nehmen. Von diesem Standpunkte aus erscheint auch die weitere Annahme, dass in dem Problem der drei Körper die Bahn des störenden Körpers eine ungestörte Ellipse sei, als gerechtfertigt. Denn die unter dieser Voraussetzung in der Bestimmung der gestörten Bahn begangenen Vernachlässigungen erscheinen ebenso berechtigt wie die jener anderen Annahme entsprungenen, wonach die Bahn des gestörten Körpers durch das Problem der drei Körper gelöst werden könne.

Die Auffassung, wonach die Lösung des soeben besprochenen Falles in der Störungstheorie als gleichbedeutend mit der allgemeinen Lösung des Problems der drei Körper gelten könne, entspricht indessen nicht ganz der Wirklichkeit. Die besonderen in dem Planetensysteme vorkommenden Grössenverhältnisse berücksichtigend kann man auch der allgemeinen Lösung des Problems eine hervorragende Bedeutung in der Störungstheorie nicht absprechen. Denn wenn auch in zahlreichen Fällen die Annahme, dass die Bahn des störenden Körpers eine ungestörte Ellipse sei, jede nur wünschenswerthe Genauigkeit liefert, so muss doch, wenn dies nicht mehr richtig ist, auch der Fall in's Auge gefasst werden, dass der Einfluss, welcher von der Störung der einen Bahn herrührt, in einem höheren Maasse zur Geltung kommt, als der von den Störungen aller übrigen Bahnen des Planetensystems herrührende. In solchen Fällen findet auch die allgemeine Lösung des Problems der drei Körper eine Verwendung in der Störungstheorie.

Wenn in's Besondere die gegenseitigen Störungen der grösseren Planeten bestimmt werden sollen, so gelangt man zu keiner hinreichenden Genauigkeit, so lange die Bahn des störenden Planeten als ungestört vorausgesetzt ist. Eher wäre es gestattet, weil die Bahnebenen der Planeten nur kleine Winkel miteinander bilden, von der Voraussetzung auszugehen, dass diese beiden Ebenen mit der Ebene des Pols zusammenfallen. Dieser Fall hat dann gleichfalls eine beträchtliche Vereinfachung des Problems zur Folge. Es ist schon im § 5 gezeigt worden, dass die Lösung von der Integration eines Systems Differentialgleichungen nicht mehr der sechsten, sondern nur noch der vierten Ordnung abhängt. Mit Rücksicht auf die vorerwähnte Eigenschaft der Planetenbahnen lässt sich die Lösung des hier besprochenen Falles in der Störungstheorie gleichfalls verwerthen.

§ 15. Ueber die Vorzüge der neuen Störungstheorie.

In der ungestörten elliptischen Bahn sind die Coordinaten des bewegten Körpers Funktion von sechs willkürlichen Beständigen, welche aus der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung ihren Ursprung herleiten, und desshalb die Elemente der Bahn oder auch die elliptischen Elemente genannt werden. Nach der bisherigen Störungstheorie sind die elliptischen Elemente zugleich diejenigen Grössen, welche variirt werden sollen, um die Störungen der elliptischen Bahn zu bestimmen. In der vorstehenden Theorie aber sind die elliptischen Elemente nicht auch die gestörten. Ich habe einige der gestörten Elemente anders gewählt, da nämlich die mittlere Bewegung des Leitstrahls gegen die grosse Achse, die Excentricität, und auch die Constante der mittleren Anomalie jedenfalls unveränderlich sein sollen. Es sind aber doch nur die zwei gestörten Elemente e und c der bisherigen Theorie weggefallen. In dieser ist die erstgenannte Grösse, welche jetzt als Beständige gedacht, mit l bezeichnet worden ist, von den gestörten Elementen abhängig angenommen. Als Ersatz für die beiden weggefallenen Elemente

e und ϵ können die Veränderlichen h und k angesehen werden, welche in einer bestimmten Verbindung mit einander den Parameter darstellen. Jenes Verfahren, welches von der Voraussetzung ausgeht, dass die elliptischen Elemente veränderlich seien, empfiehlt sich, wie schon oben im § 6 bemerkt worden ist, durch einige hervorragende Eigenschaften, so lange es sich um Nichts weiter als um die Aufstellung von Störungsgleichungen handelt. Man sieht einen Grund, Etwas Anderes an die Stelle zu setzen, erst dann, wenn auch die Gestaltung der weiteren Rechnung in Anschlag gebracht wird. Das neue Verfahren zur Bestimmnng der Störungen nimmt aber nach dieser Seite hin den Vorrang für sich in Anspruch.

Man findet die erste Näherung eines Elementes, indem man bei der Integration der Störungsgleichung die vorkommenden gestörten Elemente als Beständige betrachtet. Schon im § 7 ist darauf hingewiesen worden, dass die Schwäche der bisherigen Störungstheorie hauptsächlich dann erst in die Augen falle, wenn die Genauigkeit des Integrals über die erste Näherung hinausgehen soll. Man denke sich in den Störungsgliedern den Leitstrahl r mittels der Gleichung der Ellipse $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$ eliminirt; ferner denke man sich die wahre Anomalie v durch die Zeit und die elliptischen Elemente ausgedrückt. Dies Letztere ist vermittelst der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon - e \sin \varepsilon = l\,(t - \epsilon)\,(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}$$

zu bewerkstelligen. Die Störungsglieder zeigen sich dann als verwickelte Funktionen der Elemente e und ϵ. Es ist aber in der Umgestaltung der Funktion durch die Integration begründet, dass die erste Näherung des Integrals in einem noch höheren Maasse als das Störungsglied eine verwickelte Funktion der genannten Elemente darstellt. Die Rechnungen, welche durch die Variation dieser Elemente veranlasst sind, verursachen der bisherigen Störungstheorie jene Schwierigkeiten, auf welche im § 7 hingewiesen worden ist.

Die elliptischen Elemente e und ϵ, deren Anwesenheit die erste Näherung des Integrals zu einer verwickelten Funktion macht, sind in der neuen Störungstheorie als Beständige aufgefasst. Die Variation jener Grösse $q_{,}$, in welches das Element n übergeführt worden ist, und die der gestörten Elemente h und k, welche an die Stelle von e und ϵ getreten sind, verursacht keine Schwierigkeiten. Denn die erstgenannte Grösse kommt in den Störungsgliedern gar nicht vor, die beiden andern sind in dem einzigen Elemente p vertreten. Man hat sich schon oben überzeugt, dass die erste Näherung in der That immer nur die vier gestörten Elemente $p\,\omega\,i\,\vartheta$ unter dem Integralzeichen enthält, während die bisherige Störungstheorie neben ω, i und ϑ noch die drei weiteren gestörten Elemente n, e und ϵ unter das Integralzeichen aufnimmt. Es mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass jene vier Elemente gerade diejenigen Veränderlichen sind, welche neben der Zeit in der Störungsfunktion vorkommen, nachdem man die Polarcoordinaten r, $r_{,}$ und s mit Hilfe der Gleichungen:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v, \qquad \frac{p_{,}}{r_{,}} = 1 + e_{,} \cos v_{,},$$

$$s = \cos^2 \frac{i}{2} \cos(v - v_{,} + \omega - \omega_{,}) + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(v + v_{,} + \omega + \omega_{,} - 2\,\vartheta)$$

eliminirt hat. Es ist ferner auch bemerkenswerth, dass die erste Näherung jedesmal eine einfach gestaltete Funktion von p ist. Denn dieses Element tritt immer nur als Faktor der einzelnen Störungsglieder auf. Wenn aber überhaupt Etwas geeignet ist, auf die Vorzüge der neuen Störungstheorie hin-

zuweisen, so sind es die in diesen Vergleichungen berührten Eigenthümlichkeiten. Insbesondere ist hiermit dargethan, dass sich die Rechnung zur Ermittlung der zweiten und der weiteren Näherungen in der neuen Störungstheorie vor den bisherigen Rechnungen durch Einfachheit auszeichnet.

Um noch weiter auf die Bedeutung der hiermit beseitigten Schwierigkeiten hinzuweisen, möge es mir erlaubt sein, an dieser Stelle die Worte eines vielgenannten Forschers anzuführen, welcher wohl mehr als irgend Jemand mit der Theorie des Mondes vertraut ist. Bei der Berechnung der Mondstörungen hat Herr *Hansen* der Methode, wonach die Störungsgleichungen analytisch integrirt werden sollen, eine andere gegenübergestellt, welche auf die Forderung gegründet ist, dass die numerische Berechnung der Störungen aus den Störungsgleichungen selbst unternommen werde. Im Hinweis auf die Arbeiten der Herren *Adams* und *Delaunay* bestreitet Herr *Hansen* gewissermassen die Giltigkeit des Integrals, welches auf rein analytischem Wege zu Stande kommt, indem er in der Einleitung zu seiner „Darlegung der theoretischen Berechnung" S. 95 sagt: „Zu den Operationen, durch welche die Convergenz der Reihen bedeutend geschwächt, oder gar ganz in Frage gestellt werden muss, rechne ich in erster Linie die Auflösung der Nenner, welche durch die Integration eingeführt werden, in unendliche, nach Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegung der Sonne zu der des Mondes fortschreitende Reihen. Diese Reihen werden so unregelmässig, und die numerischen Coefficienten derselben wachsen so stark, dass, wenn sie auch in der That im Allgemeinen für den Mond convergiren sollten, man über die Genauigkeit, welche ihre Fortsetzung bis zu irgend einer Potenz des genannten Verhältnisses gewährt, sich gar kein Urtheil bilden kann." In der neuen Störungstheorie sind diese Integrationsnenner beständig, und zur Auflösung derselben in unendliche Reihen ist nun in keiner Weise mehr eine Nöthigung gegeben.

Wenn die ersten Näherungen der Integrale nach den oben genannten elliptischen Elementen nicht mehr variirt zu werden brauchen, um die Störungsglieder der zweiten Ordnung aufstellen zu können, so ist dies nicht der einzige Vortheil, welcher sich aus der Beständigkeit dieser Elemente herleitet. In der bisherigen Störungstheorie, in welcher diese Elemente veränderlich gedacht werden, ist man genöthigt, dieselben als unbestimmte Grössen bis zur vollendeten Darstellung der Integrale festzuhalten, um nach und nach zu den Störungsgliedern der höheren Ordnungen aufsteigen zu können. Auch diese Rücksicht ist jetzt überflüssig geworden. In der besonderen Störungsaufgabe ist es gestattet, an die Stelle jener beständigen Elemente von vornherein die betreffenden Zahlenwerthe zu setzen. Wenn auch in Folge dessen die Kennzeichnung des Integrals als Funktion jener Beständigen verloren geht, so kann dies doch die Genauigkeit der weiteren Rechnung nicht beeinträchtigen. Man mag immerhin darauf bedacht sein, die Integration der verschiedenen Störungsglieder mit Beibehaltung unbestimmter Beständigen durchzuführen, weil die Integrale dann für alle Störungsaufgaben ohne Ausnahme Verwendung finden können. Wenn es sich aber um die Integralsumme einer Reihe von Störungsgliedern handelt, so können durch die Substitution der Zahlenwerthe an die Stelle jener unbestimmten Beständigen ausserordentlich grosse Verwicklungen vermieden werden. Während der vorhin aus der Beständigkeit jener elliptischen Elemente hergeleitete Vortheil den Störungsgliedern höherer Ordnung zu Gute kommt, berührt der hier besprochene auch schon die Störungsglieder der ersten Ordnung.

Die Vorzüge der neuen Theorie machen sich in den Störungsgliedern der ersten Ordnung noch in anderer Weise geltend. Es zeigt sich nämlich, dass die Variation der neuen Elemente einen kleineren Spielraum hat als die der elliptischen. Was die letzteren betrifft, so tritt der Fall ein, dass sich deren Variationen, wenn dieselben auf die Coordinatenwerthe übertragen werden, zum Theil wieder aufheben. Die Genauigkeit der Resultate, welche man in den Elementen erreicht hat, erleidet also in den Coordi-

natenwerthen eine Einbusse. Schon im § 7 ist darauf hingewiesen worden, dass die auf die Veränderlichkeit der elliptischen Elemente gegründete Störungstheorie dem Perihel gewisse Bestandtheile zutheilt, welche unter anderen Voraussetzungen diesem Elemente fern bleiben würden. Da nun die Coordinatenwerthe, die Länge, die Breite und der Leitstrahl des gestörten Körpers Funktionen von ω sind, so versteht es sich, dass die erwähnten Bestandtheile von ω, weil sie für die Coordinatenwerthe bedeutungslos sind, nur dadurch ausgeglichen werden können, dass entsprechende Bestandtheile anderen neben ω in den Coordinatenwerthen vorkommenden Elementen zugetheilt sind. Hieraus erklärt sich die Anwesenheit des Nenners e in den im § 6 aufgestellten Derivirten ω' und c'. Die neuen Elemente der Störung zeigen sich frei von diesem Uebelstande. Denn es haben deren Variationen keinen grösseren Spielraum als auch die der Störung entsprechenden Variationen der Coordinatenwerthe. Um die Störungsrechnungen in diesem Sinne zu fördern, hat Herr *Hansen* die Coordinaten des gestörten Körpers in gewisse Bestandtheile zerlegt, deren Variationen sich gegenseitig nicht theilweise aufheben. Den gleichen Erfolg haben die oben aufgestellten neuen Elemente der Störung, neben den andern in diesem Paragraph besprochenen Vorzügen.

Wenn bei der Integration der Störungsgleichungen überhaupt keine der Zeit proportionalen Glieder entständen, so würden sich in den trigonometrischen Funktionen, durch welche die Störungsglieder ausgedrückt sind, die beiden Winkel v und r, immer nur mit ganzzahligen Coefficienten verbinden. Die Beschaffenheit der Integrale wäre dann eine wesentlich einfachere als sie wirklich ist. Es zeigt sich, dass die Coefficienten der der Zeit proportionalen Glieder kleine Bruchwerthe sind. Durch die Verbindung der verschiedenen trigonometrischen Funktionen, welche in den Störungsgliedern als Factoren nebeneinander auftreten, entstehen unter anderen auch solche Glieder, welche trigonometrische Funktion der der Zeit proportionalen Glieder allein sind. Wegen des kleinen Coefficienten von t erhält das Integral eines solchen Gliedes einen kleinen Nenner, und es finden sich desshalb in den Integralen der Störungsgleichungen gewisse Bestandtheile, deren Derivirten, für sich betrachtet, wegen ihrer geringen Grösse neben den andern Störungsgliedern nicht mehr berücksichtigt zu werden brauchten. In der Aufstellung dieser Glieder liegt jederzeit eine Schwierigkeit der Integration; aber es kommt der Vereinfachung der Rechnung zu Statten, wenn die Anwesenheit der der Zeit proportionalen Glieder auf wenige Elemente beschränkt ist. Ein Vorzug der neuen Elemente vor den elliptischen hat in diesem Umstande seinen Grund. Es ist gezeigt worden, dass in der neuen Theorie von den gestörten Elementen nur die beiden ω und ϑ die der Zeit proportionalen Glieder enthalten; dass alle übrigen Elemente davon frei sind. Wenn man aber an der Variation der elliptischen Elemente festhalten will, so muss jedenfalls noch in einem dritten Elemente ein solches Glied vorausgesetzt werden. Auch das der Beständigen der mittleren Anomalie entsprechende Element, welches mit c bezeichnet worden ist, setzt ein der Zeit proportionales Glied voraus.

Nimmt man die elliptischen Elemente der gestörten Planetenbahn als veränderlich an, so kann die grosse Achse der Ellipse durch eine Funktion ausgedrückt werden, in welcher sich keine der Zeit proportionalen Glieder bemerklich machen. Dieser Satz, welchen zuerst *Laplace* nur für kleine Excentricitäten nachgewiesen hat, wurde von *Lagrange* auf beliebige Excentricitäten ausgedehnt. Doch auch so waren die Störungsglieder der ersten Ordnung allein berücksichtigt worden. *Poisson* hat alsdann nachgewiesen, dass der erwähnte Satz in aller Strenge auch noch für die Störungsglieder der zweiten Ordnung richtig bleibt. Dies Ergebniss wird als eine seiner schönsten Arbeiten gepriesen. Denn auf die Unveränderlichkeit der grossen Achse, abgesehen von deren periodischen Aenderungen, hat man den Beweis für die Stabilität des Weltsystems gegründet. Zu den Störungsgliedern der dritten und höheren Ordnungen übergehend, hat man übrigens die der Zeit proportionalen Glieder in dem genannten Ele-

mente doch wieder aufnehmen müssen. Eben so wenig ist man im Stande gewesen, in den übrigen Elementen die der Zeit proportionalen Glieder fern zu halten, wenn es sich um die Glieder der höheren Ordnungen handelt. Dies ist eine weitere Schwierigkeit, welche die Variation der elliptischen Elemente mit sich gebracht hat. In der neuen von mir aufgestellten Störungstheorie dagegen finden sich die der Zeit proportionalen Glieder nur in den Elementen ω und ϑ. Die vier übrigen gestörten Elemente $\eta\ \sigma\ \tau\ i$ sind frei davon, bis zu welcher Ordnung man die Störungsglieder auch berücksichtigen wollte. Die Stabilität des Weltsystems erscheint auf dieser Grundlage für jeden noch so grossen Zeitraum als ausser Frage gestellt.

Mit vollkommener Sicherheit dürfte freilich auch jetzt nicht vorausgesetzt werden, dass es niemals eine Zeit gegeben habe, wo die Gestalt des Weltsystems eine wesentlich andere gewesen ist als die gegenwärtige, und eben so wenig dürfte man behaupten, dass nicht einmal wieder eine Zeit kommen werde, wo das Weltsystem eine Umwälzung erleiden müsste. Die obige Schlussfolgerung, die Stabilität des Weltsystems betreffend, ist auf die eigenthümliche Form gegründet, welche ich den Integralen der Störungsgleichungen gegeben habe. Diese Form hat selbstverständlich nur so lange Bestand, als die unendlichen Reihen, in welchen die Integrale dargestellt werden sollen, ihre Convergenz behalten. Unter denjenigen Verhältnissen, welche gegenwärtig in dem Planetensysteme die maassgebenden sind, möchte allerdings nicht eine Veranlassung gegeben sein, durch welche die Convergenz der Reihen in Frage gestellt ist. Sollten aber einmal andere Massen, von deren Vorhandensein man gegenwärtig keine Kenntniss hat, in den Bereich des Planetensystems gelangen, dann könnte die Convergenz jener Reihenentwicklung wohl in Frage gestellt sein.

Es ist eine hervorragende Eigenschaft der neuen Störungstheorie, dass die der Zeit proportionalen Glieder nur in den beiden Elementen ϑ und ω vorkommen. Die auf die Variation der elliptischen Elemente gegründete Theorie setzt die Anwesenheit eines solchen Gliedes auch in dem Elemente c voraus. Es ist ferner bezeichnend für die Grösse der Schwierigkeiten in der bisherigen Theorie, dass man sich genöthigt gesehen hat, eben diese Glieder auch in den übrigen drei elliptischen Elementen zuzulassen, sobald man zu den Störungsgliedern höherer Ordnung übergeht. Davon ist schon vorhin die Rede gewesen. Es erübrigt jetzt noch, einer anderen Schwierigkeit Erwähnung zu thun, welche mit der vorerwähnten im Zusammenhange steht. Man ist in der bisherigen Störungstheorie genöthigt gewesen, die Coefficienten aller der Zeit proportionalen Glieder als Veränderliche aufzufassen. Die Zulässigkeit beständiger Coefficienten ist nämlich an die Voraussetzung geknüpft, dass die der Zeit proportionalen Glieder von jenen übrigen drei elliptischen Elementen ausgeschlossen seien (vgl. § 12). Im Hinblick auf diesen Umstand kann es als ein grosser Vorzug der neuen Störungstheorie gelten, dass die der Zeit proportionalen Glieder in den Elementen ϑ und ω jedenfalls beständig sind. Die Unveränderlichkeit jener elliptischen Elemente, welche der neuen Störungstheorie zur Grundlage dient, hat demnach die Unveränderlichkeit von noch anderen Grössen möglich gemacht, welche gleichfalls eine bedeutende Rolle in der Störungstheorie spielen.

In der Theorie des Mondes steigern sich die Schwierigkeiten, welche aus der beabsichtigten Variation der elliptischen Elemente hervorgehen, in solchem Maasse, dass man bis dahin hat glauben müssen, dieselbe sei mehr als irgend eine andere Störungsaufgabe erschwert. Die gegentheilige Ansicht dürfte indessen der Wahrheit näher liegen. Es sind viele Schwierigkeiten, welche der Theorie des Mondes bisher so vorzugsweise zur Last gefallen sind, nunmehr als beseitigt zu betrachten; wo hingegen jene andere Schwierigkeit der Störungsaufgaben, welche in der Reihenentwicklung der Störungsfunktion ihren Grund hat, und der eigenthümlichen Beschaffenheit der Störungsfunktion zufolge unvermeidlich ist, in der Theorie des Mondes als untergeordnet erscheint.

§ 16. Ueber die Methode der variirten Näherung, und die Methode der successiven Substitution.

Wenn ein System Differentialgleichungen zu integriren ist, so wird man in erster Linie darauf bedacht sein, dass das Integral vermittelst Quadraturen dargestellt werde. Wo immer die Lösung eines Problems in dieser Form gelingt, da muss man dieselbe willkommen heissen. Wo dies aber, wie in dem Problem der drei Körper, nicht möglich ist, da ist man auf die sogenannten Näherungsmethoden angewiesen. Unter gewissen Voraussetzungen kann man dem Problem eine Lösung geben, welche zwar gleichfalls durch Quadraturen ausgedrückt ist, welche aber doch nur eine allmälige Annäherung an den genauen Werth gestattet, weil unter dem Integralzeichen diejenigen Veränderlichen vorkommen, welche durch die Quadraturen selbst bestimmt werden sollen. Eine derartig vorkommende Veränderliche muss, wie schon im § 6 ausdrücklich bemerkt worden ist, die Eigenschaft besitzen, dass sie annähernd als Beständige gedacht werden darf, da nämlich ihre Variation nur ein kleiner Bruchtheil derjenigen Aenderung ist, welche die unabhängig gedachte Veränderliche in dem gleichen Zeitraume erfährt. In dem Maasse, als dies der Wahrheit nahe kommt, liefert die Quadratur unter der Annahme, dass unter dem Integralzeichen die gesuchten Grössen Beständige seien, einen mehr oder weniger genauen Werth des Integrals. Man hat denselben die erste Näherung des Integrals genannt. Nachdem man die erste Näherung der gesuchten Veränderlichen bestimmt hat, ist man in den Stand gesetzt, eine weitere Annäherung an den genauen Werth zu erlangen. Es mag hier der passende Ort sein, die zwei verschiedenen Wege zu verfolgen, welche man einschlagen kann, um vermittelst der Variation der Constanten schliesslich zu dem genauen Werthe der gesuchten Veränderlichen zu gelangen.

Betrachtet man die unter dem Integralzeichen vorkommenden Elemente der Störung als beständige Grössen, so erhält man durch die Quadratur die erste Näherung des Integrals. Um die zweite Näherung des Integrals aufzustellen, fügt man der ersten Näherung eine Correction bei. Man differentiirt in dieser Absicht die erste Näherung, indem man die gestörten Elemente allein als Funktion der Zeit betrachtet. Insofern die Derivirten der gestörten Elemente durch die Störungsgleichungen selbst gegeben sind, gelangt man zu einem Ausdrucke, welcher ebenso wie vorhin, unter der Voraussetzung, dass die vorkommenden Elemente beständig seien, integrirt werden kann. Das Integral dieses Ausdrucks ist die beizufügende Correction. Indem man alsdann in derselben Weise der ersten Correction selbst eine Correction beifügt, und so fortfährt, kann man jede nur wünschenswerthe Genauigkeit des Integrals erreichen. Es mag diese Methode die der variirten Näherung heissen.

Um diejenigen Bestandtheile des Integrals, welche unter der Voraussetzung beständiger Elemente vernachlässigt werden, nach und nach zu ersetzen, kann man noch ein anderes Verfahren einschlagen. Dasselbe unterscheidet sich von der Methode der variirten Näherung wesentlich dadurch, dass nun die gestörten Elemente in den Störungsgleichungen von vornherein, bevor noch eine Integration der Störungsglieder ausgeführt ist, als Veränderliche angesehen werden. Man zerlege die gestörten Elemente in jene beiden Bestandtheile, von denen der eine als Beständige gedacht wird, der andere aber eine Veränderliche ist, welche als ein kleiner Bruchtheil des ersten Bestandtheils angesehen werden darf. Diese Zerlegung der Elemente in zwei Bestandtheile hat auch eine Trennung unter den Störungsgliedern zur Folge. Der beständige Theil der Elemente fällt den Störungsgliedern der ersten Ordnung zu; während sich aus den veränderlichen Bestandtheilen die Störungsglieder der zweiten Ordnung zusammensetzen. Man inte-

grire in allen Störungsgleichungen nur die Glieder der ersten Ordnung, in welchen jetzt keine zu variirenden Elemente mehr vorkommen. Auf diesem Wege gelangt man wieder zu den ersten Näherungen der Integrale. Die ersten Näherungen müssen alsdann in die Störungsglieder der zweiten Ordnung eingesetzt werden. In dieser Absicht zerlege man auch den veränderlichen Theil der Elemente in zwei Bestandtheile, von denen der eine mit der nun aufgefundenen ersten Näherung zusammenfallend gedacht wird, der andere einen kleinen noch unbekannten Bruchtheil davon ausmacht. In Folge dessen entsteht abermals eine Trennung unter den noch nicht integrirten Störungsgliedern. Die Störungsglieder der zweiten Ordnung sind nämlich durch jenen ersteren Bestandtheil bestimmt; der andere noch unbekannte Bestandtheil der Elemente führt zu den Störungsgliedern der dritten Ordnung. Die Integration der erstgenannten Glieder liefert die zweite Näherung des Integrals. Indem man in dieser Weise fortrechnet, ist man im Stande, nach und nach jede nur wünschenswerthe Genauigkeit in dem Integrale zu erreichen. Man kann dies die Methode der successiven Substitution nennen.

In dem Problem der drei Körper ist die erste Näherung des Integrals eine verwickelte Funktion der elliptischen Elemente e und c. Die Methode der variirten Näherung führt desshalb, wenn man die elliptischen Elemente als die gestörten betrachtet, zu schwierigen Rechnungen. Durch das Verfahren der successiven Substitution wird zwar die Variation der ersten Näherung nach den gestörten Elementen vermieden; allein die Schwierigkeiten, welche der Integration aus jener Annahme, dass die elliptischen Elemente zugleich die gestörten sein sollen, erwachsen, sind doch wohl nicht geringer, als sie sich in dem andern Falle zeigen. Da nämlich die Störungsglieder, in welche die erste Näherung der gestörten Elemente eingesetzt werden soll, wenn auch weniger als deren Integrale, selbst verwickelte Funktionen der gestörten Elemente e und c sind, so ist es die Substitution dieser Elemente, welche Schwierigkeit verursacht. Man müsste zum Behufe dieser Substitution in den Störungsgliedern den Leitstrahl vermittelst des *Taylor*'schen Satzes nach Potenzen der veränderlichen Bestandtheile δe und δc entwickeln. An die Stelle des Leitstrahls würde dann eine unendliche Reihe treten; und man sieht nun, dass auch dem Verfahren der successiven Substitution eigenthümliche aus der Veränderlichkeit der elliptischen Elemente hervorgehende Schwierigkeiten entgegenstehen.

In der neuen Störungstheorie habe ich die beiden vorgenannten elliptischen Elemente als unveränderlich angenommen; und an deren Stelle andere Elemente der Störung gesetzt. Mit Rücksicht auf diejenigen Rechnungen, welche durch die Methode der variirten Näherung hervorgerufen sind, muss man den neuen Elementen den Vorrang vor den elliptischen einräumen. Diesen Vorrang behaupten dieselben auch dann noch, wenn man sich des Verfahrens der successiven Substitution bedient. In der neuen Störungstheorie hat auch die Substitution der ersten Näherung keine Schwierigkeit, weil hier die Störungsglieder einfache Funktionen der gestörten Elemente sind, vgl. § 15.

Die oben erwähnte Reihe, welche an die Stelle des Leitstrahls gesetzt werden muss, um die veränderlichen elliptischen Elemente der Methode der successiven Substitution zugänglich zu machen, steht in einem merkwürdigen Zusammenhange mit der im § 13 aufgestellten Gleichung des Parameters:

$$p^2 - p_0^2 + \frac{2a}{1 - e^2} = 2\,\frac{p}{r}\,(\varepsilon \cos v + \sigma \sin v)\,.$$

Wenn man die Veränderliche v als Funktion der Zeit auffasst, so erhält man aus der Gleichung $\left(\frac{p}{r}\right)^2 = (1 + e\cos v)^2$ das Quadrat des Leitstrahls als Funktion der Zeit und der elliptischen Elemente p e und c. Von der Absicht ausgehend, diese Funktion nach Potenzen der veränderlichen Bestandtheile

δe und δc geordnet darzustellen, kann man sich für den Fall, dass in der *Taylor*'schen Entwicklung nur die ersten Potenzen dieser Bestandtheile beibehalten werden sollen, einer schon im § 13 aufgestellten Gleichung bedienen. Zur Bestimmung der Veränderlichen v ist dort:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon - e \sin \varepsilon = t - c$$

angenommen, und hat man alsdann die folgende Gleichung gefunden:

$$\delta(a^2) = 2a^2 \cdot \frac{p}{r}\left(\frac{\delta e}{1-e^2} \cos v + e\, \delta c \sin v\right).$$

Zu diesem Ergebnisse gelangt man, von der Gleichung $\frac{a^2}{r^2} = \left(\frac{1 + e \cos v}{1-e^2}\right)^2$ ausgehend, vermittelst der *Taylor*'schen Entwicklung.

Indem man die Variationen δe und δc als die negativ genommenen ersten Näherungen der veränderlich gedachten elliptischen Elemente e und c betrachtet, so dass also $e = e_0 - \delta e$ und $c = c_0 - \delta c$ ist, erhält man durch die vorliegende Gleichung die erste Näherung derjenigen Variation, welche die grosse Achse der Ellipse erleidet, wenn man bei unverändertem Leitstrahle die veränderlichen Elemente e und c in die Beständigen e_0 und c_0 übergehn lässt. Setzt man ferner in die vorliegende Gleichung die Abkürzungen:

$$\frac{p^2\, \delta e}{1-e^2} = \tau \qquad \text{und } p^2 e\, \delta c = \sigma,$$

so ist dieselbe identisch mit jener Gleichung des Parameters, durch welche unter der Voraussetzung, dass die Elemente e und c beständige Grössen seien, der veränderliche Bestandtheil der grossen Achse bestimmt werden kann. Dieser veränderliche Bestandtheil ist also identisch mit der soeben erhaltenen Variation der grossen Achse, und man gelangt zu dem Schlusse, dass die grosse Achse in der ursprünglichen Gleichung $\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2}$, in welcher veränderliche Elemente e und c vorausgesetzt sind, eine Beständige ist.

Kennt man die ersten Näherungen der Veränderlichen τ und σ, so kennt man auch die veränderlich gedachten Elemente e und c, welche an die Stelle der beständigen Elemente gesetzt, die grosse Achse der Ellipse, welche vorher eine Veränderliche war, zu einer Beständigen machen. Man hat also eine Lösung des Problems, welche von veränderlichen Elementen e und c ausgehend, in der ersten Näherung der grossen Achse alle veränderlichen Glieder, auch die periodischen, zum Verschwinden bringt.

Wenn man sich die oben ausgesprochene Absicht vergegenwärtigt, welche der *Taylor*'schen Entwicklung zu Grunde lag, dass man den Leitstrahl als Funktion der veränderlich gedachten elliptischen Elemente e und c darstellen wollte, so kann man in der Uebereinstimmung dieser *Taylor*'schen Entwicklung mit jener Gleichung des Parameters einen Grund sehen, in der neuen Störungstheorie bei der Variation des Parameters der Methode der successiven Substitution vor der Methode der variirten Näherung den Vorzug zu geben.

§ 17. Die neue Störungstheorie in ihrem Verhältnisse zur Integralrechnung.

Wenn ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen integrirt werden soll, so verlangt die Aufgabe in ihrer ursprünglichen Gestalt, dass n unbekannte Grössen als Funktion von eben so vielen willkürlichen Beständigen und einer unabhängigen Veränderlichen t dargestellt werden. Dies ist diejenige Form des Integrals, welche sich, da die Veränderliche t als gegebener Zahlenwerth vorausgesetzt wird, zum Behufe der numerischen Berechnung jener n veränderlichen Grössen in erster Linie empfiehlt, und welche desshalb jedenfalls beibehalten werden sollte, so lange nicht überwiegende Vortheile in einer anderen Form des Integrals wahrgenommen sind. Wenn es aber in der That dienlich ist, die Elemente der Störung als Funktion der Integrationsbeständigen und der Zeit darzustellen, so würde dies die neue Störungstheorie weit eher leisten als die bisherige. Denn in der neuen Theorie sind von vornherein einige Grössen, welche in der bisherigen als Veränderliche vorkommen, durch Beständige ersetzt, und es steht dieselbe ihrer ganzen Anlage nach der Verwirklichung dieses Gedankens näher.

Durch die Methode der variirten Näherung ergeben sich die Integrale der Störungsgleichungen nicht als Funktion von Beständigen und der Zeit, sondern es treten an die Stelle jener Beständigen die als veränderlich gedachten Elemente. Wollte man die veränderlichen Elemente als Funktion der Integrationsbeständigen und der Zeit darstellen, so könnte man dazu gelangen, indem man die durch die Methode der variirten Näherung erzielten Integralgleichungen nach den unbekannten Elementen auflöst. Man kann aber diese andere Form der Integrale, welche an die Stelle der veränderlichen Elemente eben so viele Integrationsbeständigen setzt, auch aus den Störungsgleichungen selbst herleiten. Es führt dazu unmittelbar das Verfahren der successiven Substitution. In diesen Bemerkungen habe ich die Integrationsarbeit von einer Seite aufgefasst, welche den Gedanken nahe legt, dass von den beiden im vorigen Paragraphen beschriebenen Näherungsmethoden die letztere, nämlich die Methode der successiven Substitution ein Vorrecht habe, und es soll dies Beachtung finden, so lange wenigstens als nicht ganz besondere Rücksichten vorliegen, welche der Methode der variirten Näherung den Vorzug geben.

In der Lösung des Problems, welche auf die neue Störungstheorie gegründet ist, spricht sich eine für die Integralrechnung beachtenswerthe Thatsache aus. Zur Bestimmung der Bahn des gestörten Körpers hat man ein System Differentialgleichungen der sechsten Ordnung. Ich will indessen zunächst nur den einfachen Fall in's Auge fassen, dass der gestörte Körper mit dem störenden in einer und derselben Ebene liege. Es fallen dann die beiden Veränderlichen i und ϑ weg, und man behält ein System der vierten Ordnung. Es ist unmöglich, dieses System auf ein anderes zurückzuführen, dessen Ordnung noch niedriger ist. Wenn nun aber die näherungsweise Integration, gegründet auf die Variation der Constanten, unvermeidlich ist, so dürfte man vielleicht erwarten, dass es sich hier um Quadraturen handele, welche nach vier verschiedenen veränderlichen Elementen zu variiren sind. In Wirklichkeit sind es aber nur zwei Elemente, nach welchen die Integrale variirt werden sollen. Denn es kommen in der That nur die beiden Elemente p und ω unter dem Integralzeichen vor. Im Allgemeinen, wenn die beiden Bahnen nicht in eine und dieselbe Ebene hineinfallen, wenn also ein System Differentialgleichungen der sechsten Ordnung vorliegt, ist die Lösung durch Quadraturen ausgedrückt, in welchen nicht sechs, sondern nur vier zu variirende Grössen vorkommen. Dies sind die gestörten Elemente $p\ \omega\ i\ \vartheta$.

Wenn sich unter dem Integralzeichen überhaupt keine zu variirenden Veränderlichen fänden, so könnte es Niemand in Abrede stellen, dass die sechs Integrale des Systems durch gewöhnliche Quadra-

turen dargestellt seien. Da nun aber nicht sechs, sondern nur vier zu variirende Grössen unter dem Integralzeichen vorkommen, so ist man dieser Darstellung des Integrals wenigstens näher gekommen. Dies ist immerhin ein Grund, zu behaupten, dass nun zwei Integrale des Systems Differentialgleichungen der sechsten Ordnung durch gewöhnliche Quadraturen dargestellt seien.

Ich habe hier jene einfachere Bewegungserscheinung im Auge gehabt, wonach die Bahn des störenden Körpers als eine ungestörte Ellipse angenommen ist. Auch die Lösung des allgemeinen Problems der drei Körper lässt sich von der Integration eines Systems Differentialgleichungen abhängig machen, welches der sechsten Ordnung angehört, vgl. § 5. Hiernach werden von sieben unbekannten Veränderlichen sechs als Funktion der siebenten dargestellt. Sollen aber die unbekannten Veränderlichen unmittelbar als Funktion der Zeit dargestellt werden, so behält man ein System Differentialgleichungen der siebenten Ordnung. Im § 14 habe ich die vollständige Lösung des allgemeinen Problems, in diesem Sinne aufgefasst, auf Quadraturen zurückgeführt, in welchen sechs veränderliche Elemente vorkommen, nämlich p $p_,$ J $\omega - \vartheta$ $\omega_, - \vartheta$ und $p_,'$. Man sieht, dass bei der Lösung des allgemeinen Problems der drei Körper die Zahl der zu variirenden Elemente um die Einheit kleiner ist als die Ordnungszahl des Systems Differentialgleichungen, auf dessen Integration das Problem zurückgeführt werden kann. Man ist also berechtigt zu sagen, dass die neue Störungstheorie in der Lösung des allgemeinen Problems ein weiteres Integral durch gewöhnliche Quadraturen dargestellt habe.

Wiewohl der besondere Fall, dass die Bahn des störenden Körpers als ungestörte Ellipse angesehen werden darf, ebenso wie das allgemeine Problem die Integration eines Systems der sechsten Ordnung verlangt, so enthält doch die Lösung des besondern Falles nur vier veränderliche Elemente unter dem Integralzeichen. In wiefern die Integration des Systems der sechsten Ordnung in dem allgemeinen Problem eine verwickeltere ist als dort, darüber gibt diese Vergleichung einen Aufschluss.

Um schliesslich auch des Falles Erwähnung zu thun, dass die beiden sich störenden Körper in eine und dieselbe Ebene hineinfallen, mag hier in Erinnerung gebracht werden, dass die Lösung des Problems in diesem Falle von der Integration eines Systems Differentialgleichungen der fünften Ordnung abhängig ist, wenn die unbekannten Veränderlichen als Funktion der Zeit dargestellt werden sollen. Es zeigt sich, dass die Anzahl der unter dem Integralzeichen vorkommenden veränderlichen Elemente wieder um die Einheit kleiner ist, als die Ordnungszahl des Systems. Denn von den oben genannten sechs fällt das Element J weg, und an die Stelle der beiden $\omega - \vartheta$ und $\omega_, - \vartheta$ tritt ein einziges $\omega - \omega_,$.

§ 18. Schlussbemerkungen, die neue Störungstheorie betreffend.

Die Störungstheorie ist ein Ergebniss des Gravitationsgesetzes. In ihren ersten Anfängen von *Newton* aufgestellt, verdankt sie ihre weitere Ausbildung, in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, hauptsächlich den Arbeiten von *Euler*, *Lagrange* und *Laplace*. Die „Mécanique céleste“ von *Laplace*, welche in den Jahren 1799—1808 erschienen ist, sollte nach der Absicht des Verfassers eine vollständige Uebersicht über den damaligen Stand der theoretischen Astronomie geben. Schon *Newton* hat in seinen „Prinzipien“, deren Herausgabe 1687, sodann in einer zweiten Auflage 1711 erfolgt ist, aus dem Gravitationsgesetze die hervorragenden Störungen des Mondes erklärt, nämlich das Rückwärtsgehen der Knoten, das Vorwärtsgehen des Perigäums, die Variation, die Evektion und die jährliche Gleichung des Mondes, wenn auch nur, zum Theil wenigstens, mit beträchtlichen Abweichungen von dem beobachteten Werthe

der Erscheinung. Das von ihm eingeschlagene Verfahren führt indessen wohl nicht über eine nur beschränkte Genauigkeit hinaus. Der unsterbliche Entdecker des Gravitationsgesetzes hat sich die überaus schwierige Aufgabe gestellt, die einzelnen Störungserscheinungen, für sich betrachtet, aus den geometrischen und mechanischen Beziehungen der drei Körper zu einander herzuleiten. Nach *Newton* ist Niemand im Stande gewesen, auf diesem Wege einen irgend wie erheblichen Fortschritt zu machen. Schon *Clairaut*, welcher als einer der ersten die Störungen analytisch verfolgt, und auch zuerst die aus der Theorie abgeleitete Bewegung des Perigäums mit der Erfahrung in Uebereinstimmung gebracht hat, war zu der Ueberzeugung gekommen, dass der von *Newton* eingeschlagene Weg nicht weiter führe. Der Methode der Analysis, welche von nun an immer mehr in den Vordergrund der Untersuchung getreten ist, war übrigens erfolgreich vorgearbeitet worden durch die im Jahre 1743 erschienene „Traité de dynamique" von *d'Alembert*, worin der Verfasser die Gesetze der Bewegung zum Erstenmale in der Gestalt von Differentialgleichungen der zweiten Ordnung aufgestellt hat. *D'Alembert* hat der Forschung die neue Bahn eröffnet.

Nach der bisherigen Störungstheorie denkt man sich die Bahn des gestörten Körpers als eine veränderliche Ellipse. Nicht allein die Lage der Ellipse ist fortwährend gewissen Aenderungen unterworfen; auch die Beständigen der *Kepler*'schen Gesetze erleiden Variationen. Die beiden Achsen der Ellipsen sind veränderlich, und ebenso auch die in gleichen Zeiten jedesmal von dem Leitstrahl beschriebenen Flächenräume. Mit Rücksicht auf die lineare Transformation, durch welche die kanonische Form der Differentialgleichungen der Bewegung wiederhergestellt worden ist, erfährt diese Auffassung der Bewegungserscheinungen keine wesentliche Aenderung. Indem man den Ort des gestörten Körpers auf den des Centralkörpers bezieht, sind es nun zwei verschiedene Ellipsen der beschriebenen Art, aus welchen die Bewegung des gestörten Körpers zusammengesetzt ist. Derselbe bewegt sich nämlich in einer Ellipse, deren Brennpunkt nicht mehr den Ort des Centralkörpers einnimmt, sondern, in der Ebene der drei Körper fortschreitend, selbst eine Ellipse um den Centralkörper beschreibt. Die lineare Transformation bewirkt, dass den Variationen der elliptischen Elemente engere Grenzen gezogen sind, als in einer einfachen um den Centralkörper beschriebenen Ellipse. Das vorstehende Bewegungsgesetz habe ich schon im § 9 Pbl. III. ausgesprochen.

Nach der neuen Störungstheorie beschreibt der Leitstrahl gegen die grosse Achse der Ellipse in gleichen Zeiten jedesmal gleiche Flächenräume. Ausserdem soll die Excentricität der Ellipse eine Beständige sein. Der Parameter bleibt veränderlich. Man könnte wohl versucht sein zu glauben, dass die Unveränderlichkeit der erstgenannten Grössen der Lösung des Problems einen gewissen Zwang auferlege. Da doch der Parameter der Ellipse als Veränderliche aufgefasst werden soll, um die Erscheinung darzustellen, so könnte man vermuthen, dass der Anschluss an die wirkliche Bahn leichter herzustellen sei, wenn auch jene beiden andern elliptischen Elemente als Veränderliche gedacht werden. Nachdem aber die Analysis in dieser Frage unzweifelhaft die Entscheidung gegeben hat, können solche geometrischen Anschauungen kein Gewicht mehr haben. Anderseits ist zu bemerken, dass Nichts im Wege steht, auch den Parameter der Ellipse als Beständige aufzufassen. Man könnte nämlich den veränderlichen Bestandtheil des Parameters auf eine Bewegung der Ellipse beziehen. Diese Bewegung würde in solcher Art vor sich gehen, dass die Verrückung der gestörten Masse jedesmal in der Richtung des Leitstrahls jener andern Ellipse erfolgt, deren Parameter als veränderliche Grösse gedacht worden ist. Man hat es dann mit einer Ellipse zu thun, welche den *Kepler*'schen Gesetzen vollständig unterworfen ist; und alle Störungen sind auf gewisse Bewegungen dieser Ellipse zurückgeführt. Die gestörten Elemente, durch welche die Lage der Ebene der Bahn bestimmt ist, sind der Knoten und die Neigung; die beiden

andern gestörten Elemente, das Perihel und der Parameter, geben die Lage der *Kepler*'schen Ellipse in der beweglichen Ebene.

Es könnte auch vielleicht auffallen, dass man die Bewegung eines Punktes zurückführen wolle auf die Summe von verschiedenen Einzelbewegungen, welche einer *Kepler*'schen Ellipse zugetheilt sind. Diese Auslegung hört aber auf befremdlich zu sein, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die Geometrie an und für sich in der Lösung des Problems von vorn herein keinen Aufschluss geben kann, dass sie auch hier Nichts weiter geben soll als ein räumliches Bild, diejenigen Bewegungserscheinungen veranschaulichend, in welche die Gesammtbewegung der gestörten Masse zerlegt werden muss, damit dieselben einzeln genommen der Analysis zugänglich sind.

Vollständiger lässt sich das Bewegungsgesetz in einer Form aussprechen, der zufolge die Gesammtwirkung der beiden von dem Centralkörper und von der störenden Masse ausgehenden Anziehungen auf jene Wirkungen zurückgeführt ist, welche diese beiden Anziehungen einzeln genommen auf den Körper ausüben würden. Anknüpfend an die vorhin erwähnte lineare Transformation kann man den veränderlichen Parameter der Ellipse dem Coefficienten der linearen Transformation einverleiben. Man denke sich den Ort des Centralkörpers als den gemeinsamen Brennpunkt zweier *Kepler*'schen Ellipsen. Die rechtwinkelige Coordinate des gestörten Körpers, bezogen auf den Ort des Centralkörpers, ist dann eine lineare Funktion der gleichnamigen Coordinaten der beiden Körper, deren Bahnen die *Kepler*'schen Ellipsen sind. Die Coefficienten der linearen Funktion sind als veränderliche Grössen aufzufassen; und ebenso auch diejenigen Elemente, durch welche die Ebene der Bahn gegen die Ebene des Pols, und die Lage der grossen Achse in jener Ebene festgestellt sind.

Streng genommen stören sich alle Planeten gleichzeitig in ihrer elliptischen um die Sonne beschriebenen Bahn. Wenn es erlaubt ist, das vorstehende Bewegungsgesetz, welches die Lösung des Problems der drei Körper versinnlicht, auf diese zusammengesetztere Erscheinung zu übertragen, so hat man jedem Planeten eine *Kepler*'sche Ellipse zuzutheilen. Die Bewegung irgend eines der gestörten Planeten ist dann einer linearen Funktion der in diesen *Kepler*'schen Ellipsen erfolgenden Bewegungen gleichzusetzen. Das Problem, in dieser einfacheren Gestalt aufgefasst, verlangt nur noch die Bestimmung der veränderlichen Coefficienten in jener linearen Transformation, und der übrigen gestörten Elemente, durch welche die Lage jeder einzelnen Ellipse festgestellt ist.

Dritter Abschnitt.

Integration der Störungsglieder.

§ 19. Ueber die Form des Integrals der Störungsglieder.

Um die Störungsglieder integriren zu können, entwickelt man die Störungsfunktion nach Potenzen des Verhältnisses der Leitstrahlen $\frac{r}{r_,}$. Für den Fall, dass die Bahn der einen Masse die der andern vollständig einschliesst, behält diese Entwicklung in dem ganzen Verlaufe der Bewegungserscheinungen ihre Convergenz, und alle Glieder der Störungsgleichungen sind in den folgenden zwei Formen enthalten:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^{n_,} \cos(m v - m_, v_,), \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^{n_,} \sin(m v - m_, v_,),$$

wo r der Leitstrahl der inneren, $r_,$ der Leitstrahl der äusseren Bahn ist, v und $v_,$ die wahren Anomalien der beiden Massenpunkte sind. Der Buchstabe $n_,$ bezeichnet ebenso wie n und m eine positive ganze Zahl; dagegen ist $m_,$ irgend ein positiver oder negativer Zahlenwerth.

Diese Störungsglieder sind Funktion der Winkel v und $v_,$, nachdem man die Leitstrahlen mit Hilfe der beiden Gleichungen:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v, \qquad \frac{p_,}{r_,} = 1 + e_,\cos v_,$$

eliminirt hat. Wollte man dieselben als Funktion von t darstellen, um alsdann nach t integriren zu können, so müsste man v und $v_,$ eliminiren vermittelst der beiden Gleichungen:

$$\varepsilon - e\sin\varepsilon = (t-c)(1-e^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{worin} \quad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2},$$

$$\text{und} \quad \varepsilon_, - e_,\sin\varepsilon_, = \lambda(t-c_,)(1-e_,^2)^{\frac{3}{2}}. \qquad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon_,}{2} = \sqrt{\frac{1-e_,}{1+e_,}}\operatorname{tg}\frac{v_,}{2}$$

ist. Zu diesen ist man durch die Integration der oben im § 8 aufgestellten Derivirten gelangt:

$$v' = \left(\frac{p}{r}\right)^2, \qquad v_,' = \lambda\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2.$$

Die Elimination von r und r_1 mittelst t führt auf weitläufige Entwicklungen, welche die Form von unendlichen Reihen haben. Ich habe mir, um diese schwierige Elimination zu vermeiden, schon im § 27 Phl. III die Aufgabe gestellt, das Integral der vorliegenden Störungsglieder als gemischte Funktion von v und r, darzustellen. Indem man anstatt der Zeit, welche als unabhängige Veränderliche angesehen werden kann, gleichzeitig die beiden Veränderlichen v und r, gebraucht, eliminirt man in den Integralen neben der erstgenannten Veränderlichen auch die beiden Beständigen e und e_1.

In dem vorigen Abschnitte sind die Integrale der Störungsgleichungen durch Quadraturen ausgedrückt worden, welche nach gewissen veränderlichen Grössen variirt werden müssen, sobald man sich nicht mehr mit derjenigen Genauigkeit begnügen will, welche durch die erste Näherung gegeben ist. Aber auch schon die erste Näherung soll nun als Funktion zweier, wenn auch in gegebener Beziehung zu einander stehenden Veränderlichen dargestellt werden. In der Theorie der Störungen sieht man sich bei jedem Schritte veranlasst, die gesuchte Grösse als Funktion von mehr als einer Veränderlichen aufzufassen. Wo immer in den Störungsaufgaben man es sich versagen wollte, der Analysis dies Zugeständniss zu machen, da müsste man erfahren, dass denselben ungerechtfertigte Schwierigkeiten entgegenstehen. Indem ich die Integrale der vorliegenden Störungsglieder als Funktion mehrerer Veränderlichen auffasse, gelange ich zu Resultaten, welche ungeachtet ihrer Einfachheit und grossen Brauchbarkeit bis dahin unbekannt gewesen sind.

Ich zerlege die Aufgabe in einige verschiedenartige Bestandtheile. Vor Allem betrachte ich den Fall, dass $m_1 = 0$ und $n_1 = 0$ ist, also die einfacheren Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m\,v\,, \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m\,v\,,$$

welche Funktion von v allein sind.

Die Methoden, wonach man bisher diese Ausdrücke integrirt hat, zielen im Wesentlichen darauf hin, dass man die Entwicklung der Potenz von $\frac{r}{p}$ in der Form:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = \Sigma A_i \cos i\,v$$

aufstelle. Nachdem man dazu gelangt ist, multiplicirt man dieselbe mit $\cos m\,v$ oder $\sin m\,v$. Alsdann hat man alle Glieder in trigonometrische Funktionen von linearer Form umzuwandeln, und es steht deren Integration nach v genommen Nichts mehr im Wege. Da der Exponent n als positive ganze Zahl vorausgesetzt ist, so zeigt sich jene Entwicklung jedenfalls in der Form einer unendlichen Reihe, mag man nun die Potenzreihen goniometrischer Funktionen zu Hilfe nehmen, oder das Theorem von *Fourier* der Entwicklung zu Grunde legen, oder auch aus den Eigenschaften hypergeometrischer Reihen dieselbe herleiten. Indem man diese verschiedenen Wege einschlägt, erreicht man Nichts weiter als dass die Coefficienten A_i in der unendlichen Reihe als Funktionen von e und n verschiedene Darstellungen erhalten. Alle diese Entwicklungen erscheinen aber von mehr untergeordnetem Werthe, nachdem man in Erfahrung gebracht hat, dass sich die verlangten Integrale auch durch eine begrenzte Anzahl Glieder ausdrücken lassen. Die Integrale bilden sich nach einem einfachen Gesetze, sobald man dieselben nicht mehr als Funktion von v allein, sondern als gemischte Funktion der zwei Veränderlichen r und v auffasst.

Es ist schon erwähnt, dass in den Störungsgliedern:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v \qquad\qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v$$

die Grössen m und n positive ganze Zahlen bezeichnen. Es muss noch hinzugefügt werden, dass diese beiden Zahlen nicht ganz unabhängig von einander sind. Es kann $n > m$ sein, auch $n = m$ und $n = m - 1$. Der Fall $n < m - 1$ kommt aber nicht vor. Es ist nicht schwierig, von vorn herein zu sehen, dass sich die Integrale der beiden vorliegenden Glieder unter der hier angegebenen Beschränkung in der That durch eine begrenzte Anzahl Glieder darstellen lassen.

Führt man anstatt der wahren Anomalie v die excentrische Anomalie ε ein, welche sich durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

bestimmt, so hat man vor Allem $\frac{r}{a} = 1 - e\cos\varepsilon$. Ferner hat man die Gleichungen:

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}, \qquad\qquad \cos v = \frac{\cos\varepsilon - e}{1-e\cos\varepsilon}.$$

Da nun m eine ganze Zahl ist, so lassen sich die Factoren $\cos mv$ und $\sin mv$ als trigonometrische Funktion von ε durch eine begrenzte Anzahl Glieder ausdrücken. Jedes dieser Glieder enthält eine ganze Potenz von r im Nenner; aber die höchste der in solcher Weise vorkommenden Potenzen ist r^m. Man merke noch die Gleichung $\varepsilon' = \frac{p}{r}\sqrt{1-e^2}$. Indem man die beiden Störungsglieder nicht mehr als Derivirten nach t, sondern als Derivirten nach ε anschreibt, führt man dieselben über in:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \cos m v, \qquad\qquad \left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin m v.$$

Unter der vorhin angegebenen Beschränkung, dass n nicht $< m - 1$ sei, lassen sich diese beiden Ausdrücke durch geschlossene Reihen darstellen, deren Glieder cosinus oder sinus der Vielfachen von ε sind. Denn wenn $n = m - 1$ oder $n > m - 1$ gesetzt wird, so fallen die oben erwähnten Nenner alle weg. Das nach ε genommene Integral ist gleichfalls eine geschlossene Reihe; und diese Eigenschaft des Integrals geht nicht verloren, wenn man an die Stelle der excentrischen Anomalie ε die wahre Anomalie v wieder einsetzt.

Man könnte wohl versucht sein, das Integral des Störungsgliedes als Funktion von ε aufzustellen. Diesem Vorhaben steht aber Anderes im Wege. Die Störungsfunktion ist nämlich durch die drei Veränderlichen $r, r_,$ und s ausgedrückt. Wenn nun auch die Leitstrahlen r und $r_,$ sich ebenso einfach durch die excentrische Anomalie als durch die wahre Anomalie ausdrücken, so kann dies doch nicht von der Veränderlichen s behauptet werden. Denn es ist:

$$s = \cos u \cos u_, + \cos(i - i_,) \sin u \sin u_,,$$

wo $u + \vartheta = v + \omega$ und $u_, + \vartheta = v_, + \omega_,$ ist. Als Funktion von v und $v_,$ zeigt sich s unabhängig von e und $e_,$. Durch die Einführung von ε und $\varepsilon_,$ anstatt v und $v_,$ nimmt es eine schwierigere Gestalt an, da dann auch die Grössen e und $e_,$ eingeführt werden. Dies ist aber nicht der einzige Grund, welcher gegen die Einführung der excentrischen Anomalie spricht. Es stellt sich heraus, dass auch jene endlichen Integrale, als Funktion von v aufgefasst, nach einem einfacheren Gesetze gebildet sind, als in dem andern Falle, wo dieselben als Funktion von ε aufgefasst werden.

§ 20. Integration des homogenen einfachen Störungsgliedes.

Um die obigen Störungsglieder, welche als Funktion von r allein die einfachen heissen sollen, nach t zu integriren, gehe ich von den Gleichungen aus:

$$v' = \left(\frac{p}{r}\right)^2, \qquad \left(\frac{r}{p}\right)' = e \sin r.$$

Mit Rücksicht darauf findet man die weitere Derivirte:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v\right)' = m\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos m v + n\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin v \sin m r.$$

Ferner findet man die Derivirte:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos m v\right)' = -m\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \sin v \sin m v + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \cos v \cos m v + (n+1)\left(\frac{r}{p}\right)^n e \sin^2 v \cos m v.$$

Um hier das letzte Glied in geeigneter Weise umzuwandeln, bedient man sich der Gleichung:

$$\left(\frac{p}{r} - e \cos v\right)^2 = 1, \qquad \text{oder} \quad \left(\frac{p}{r}\right)^2 - 2\frac{p}{r} e \cos v - e^2 \sin^2 v = 1 - e^2.$$

Man multiplicire die vorige Gleichung mit e, um alsdann $e^2 \sin^2 v$ vermittelst des Vorliegenden zu eliminiren. Dieselbe geht über in:

$$-\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e \sin v \cos m r\right)' = m\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin v \sin m v + (2n+1)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos v \cos m v + (n+1)\left(\frac{r}{p}\right)^n\left(1 - e^2 - \left(\frac{r}{p}\right)^2\right)\cos m r.$$

Man setze noch $\cos v \cos m v = \cos (m-1) v - \sin v \sin m v$, und theile die Gleichung durch $n+1$. Man erhält an deren Stelle:

$$-\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e \sin v \cos m v\right)' = \frac{m-2n-1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin v \sin m v$$
$$+ \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos (m-1) v + \left(\frac{r}{p}\right)^n\left(1 - e^2 - \left(\frac{p}{r}\right)^2\right)\cos m v.$$

Eliminirt man schliesslich das mit $e \sin v \sin m v$ multiplicirte Glied mit Hilfe der ersteren der oben aufgezeichneten Derivirten, so findet man die Gleichung:

$$1. \quad \left(\frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos m v\right)'$$
$$= (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos (m-1) v - \frac{n+1-m}{n+1} \; \frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos m r,$$

welche in allen Fällen das Integral des Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v$ liefert.

Ich fasse zunächst den Fall $n = m$ in's Auge. Man behält die einfachere Gleichung:

$$2.\quad \left(\frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n v - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos n v\right)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos (n-1) v.$$

Daraus ergibt sich sehr leicht das Integral des Ausdrucks $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos nv$. Ein solches Störungsglied, in welchem der Exponent des Leitstrahls gleich dem Coefficienten der wahren Anomalie ist, soll ein homogenes Störungsglied heissen. Man sieht, dass man mittelst der Gleichung 2. ein homogenes Störungsglied auf ein anderes Glied derselben Art zurückführt, dessen Grad um die Einheit kleiner ist. Gebraucht man die Abkürzung:

$$s(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n v - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos n v,$$

so schreibt sich die Reductionsgleichung 2. einfacher:

$$2.\quad s(n)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos (n-1) v.$$

Integrirt man nun beiderseits nach t, so erhält man die beabsichtigte Reduction:

$$(1-e^2)\int_0^t \left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v\, dt = s(n) - \frac{2n+1}{n+1}\int_0^t \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos (n-1) v\, dt.$$

Durch die wiederholte Anwendung dieser Reduction gelangt man schliesslich, da n eine positive ganze Zahl ist, zur Integration eines von v unabhängigen Gliedes, dessen Integral der Zeit proportional ist. Das vollständige Integral des homogenen Störungsgliedes n^{ten} Grades führt hiernach zu der Reihenentwicklung:

$$3.\quad (1-e^2)\int_0^t \left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v\, dt = s(n) - \frac{2n+1}{n+1}\,\frac{e}{1-e^2}\, s(n-1) + \frac{2n+1}{n+1}\,\frac{2n-1}{n}\left(\frac{e}{1-e^2}\right)^2 s(n-2) - \cdots$$

Dieselbe besteht aus $n+1$ Gliedern, und in dem letzten Gliede hat man $s(o) = (1-e^2)\, t$ zu setzen.

Man vertausche in der Gleichung 2. den Winkel nv gegen $nv + \frac{\pi}{2}$. Dieselbe geht dann über in:

$$2'.\quad -\left(\frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v + \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \sin n v\right)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin (n-1) v.$$

Man schreibe hier abkürzend:

$$c(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v + \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \sin n v,$$

und die Reductionsgleichung schreibt sich:

$$2'.\quad -c(n)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin (n-1) v.$$

Zur vollständigen Integration des andern Störungsgliedes erhält man die Reihe:

$$3'.\quad (1-e^2)\int\left(\frac{r}{p}\right)\sin n v\, dt = -c(n) + \frac{2n+1}{n+1}\frac{e}{1-e^2}c(n-1) - \frac{2n+1}{n+1}\,\frac{2n-1}{n}\left(\frac{e}{1-e^2}\right)^2 c(n-2) + \cdots,$$

welche aus nur n Gliedern besteht, weil $c(o) = o$ ist.

Die Gleichungen 3. und 3'. lassen sich auch in der folgenden abgekürzten Form anschreiben:

$$(1-e^2)\int\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v\, dt = \Sigma C_k\, s(n-k)$$

$$-(1-e^2)\int\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n v\, dt = \Sigma C_k\, c(n-k),$$

wo unter dem Summenzeichen der Buchstabe k der Reihe nach die Zahlenwerthe 0, 1, 2 ... n erhält. Zur Bestimmung der Coefficienten C_k hat man die Gleichungen:

$$C_0 = 1, \qquad C_{k+2} = -C_{k+1}\frac{2n-1-2k}{n-k}\frac{e}{1-e^2}.$$

§ 21. Integration des nicht homogenen einfachen Störungsgliedes.

Durch die vorstehenden Entwicklungen erhält man die Integrale homogener Störungsglieder. Die Integration derjenigen Störungsglieder, welche nicht homogen sind, lässt sich auf die der homogenen Störungsglieder zurückführen. Diese Reduction kann vermittelst der schon oben aufgestellten Gleichungen bewerkstelligt werden. Man hat die Derivirte:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v\right)' = m\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v + n\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin v \sin m v\,.$$

Macht man von der identischen Gleichung Gebrauch:

$$e \sin v \sin m v = e\cos(m-1)v - \left(\frac{p}{r} - 1\right)\cos m v\,,$$

so geht die vorige Gleichung über in:

$$4.\quad \left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v\right)' = (m-n)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v + n\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\left(\cos m v + e\cos(m-1)v\right).$$

Man setze darin $m = n$, und man behält:

$$5.\quad \frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n v\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos n v + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(n-1)v\,,$$

eine Gleichung, durch welche das Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos n v$ auf ein homogenes zurückgeführt wird. Für $n = 0$ ist dasselbe unbrauchbar. Man findet übrigens für diesen Fall $\frac{p}{r}\sqrt{1-e^2} = \varepsilon'$, wo ε die excentrische Anomalie ist.

Vertauscht man auch hier $n v$ gegen $n v + \frac{\pi}{2}$, so hat man die entsprechende Gleichung:

$$5'. \qquad -\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos n v\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \sin n v + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin (n-1) v.$$

Ich nehme jetzt an, das nicht homogene Störungsglied lasse sich in ein homogenes überführen, indem man den Exponenten des Leitstrahls um i Einheiten kleiner macht, uud soll dasselbe desshalb ein nicht homogenes Störungsglied der i^{ten} Stufe heissen. Um ein solches auf homogene Glieder zurückzuführen, muss man zu der Gleichung 1. des vorigen Paragraphen zurückkehren. Indem ich abkürzend

$$s(n,m) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos m v$$

setze, wonach also $s(n, n)$ gleichbedeutend ist mit der vorhin angewendeten Funktion $s(n)$, schreibt sich die Gleichung 1. in der Form:

$$1. \qquad s(n,m)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos (m-1) v - \frac{n+1-m}{n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos m v.$$

Mit deren Hilfe würde man irgend ein nicht homogenes Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v$ auf zwei andere Glieder zurückführen, von denen das eine die gleiche Stufe hat, das andere aber eine um zwei Einheiten niedrigere Stnfe. Diese Umwandlung würde also die Rechuung dem Ziele nicht näher bringen. Es lässt sich aber aus der vorliegenden Gleichung leicht eine andere herleiten, welche dazu wohl geeignet ist. Vertauscht man m mit $-m$, so geht sie über in:

$$6. \qquad s(n,-m)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos (m+1) v - \frac{n+1+m}{n+1}\,\frac{n+m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos m v.$$

In der That kann man mit Hilfe dieser Gleichung irgend ein nicht homogenes Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v$ auf zwei andere zurückführen, deren Stufe jedesmal um zwei Einheiten niedriger ist.

Wenn das Störungsglied von der zweiten Stufe ist, so erhält man durch diese Reduction zwei homogene Glieder. Diese beiden lassen sich alsdann unter dem Beistande der Gleichung 2. durch ein einziges homogenes Glied ersetzen. Gehört das Störungsglied einer höheren Stufe an, so erhält man an dessen Stelle zwei nicht homogene Glieder. Mittels der Gleichung 1., welche für den Fall $n = m$ bekanntlich in die Gleichung 2. übergeht, kann man alsdann das eine von den beiden neuen Gliedern durch ein anderes ersetzen, dessen Stufe um vier Einheiten niedriger ist als die des ursprünglichen Gliedes. In der Gleichung 1. hat man in dieser Absicht m gegen $m+1$ und n gegen $n-1$ zu vertauschen; dieselbe geht dann über in die folgende:

$$s(n-1, m+1)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \cos (m+1) v + \frac{2n-1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} e \cos m v - \frac{n-1-m}{n}\,\frac{n-2-m}{n-1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-3} \cos (m+1) v.$$

Mit deren Hilfe eliminirt man das Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos (m+1) v$ aus der Gleichung 6., und man gelangt zn einer neuen Gleichung, durch welche das Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v$ auf die beiden $\left(\frac{}{p}\right)^{n-2} \cos m v$ und $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-3} \cos (m+1) v$ zurückgeführt wird, deren Stufe in der That beziehungsweise um zwei und um vier Einheiten kleiner ist als die des erstgenannten. Der Coefficient des letzteren der beiden neuen Glieder verschwindet für den Fall $n = m + 2$, und man behält ein einziges homogenes Glied.

Indem man den hier vorgeschriebenen Weg verfolgt, führt man zwei verschiedene Glieder von der Form $s(n, m)$ in das theilweise Integral ein. Man kann aber die beiden Gleichungen 6. und 1. zum zweitenmal in Anwendung bringen, indem man den Buchstaben m und n andere Zahlenwerthe beilegt, und man ist dann in den Stand gesetzt, die beiden jetzt vorliegenden Störungsglieder auf zwei ähnliche zurückzuführen, in welchen die Stelle von n eine um zwei Einheiten kleinere Zahl einnimmt. Es werden auf diesem Wege zwei weitere Glieder $s(n, m)$ in das theilweise Integral eingeführt. Wenn die Stufe des ursprünglichen Störungsgliedes durch $2i$ bezeichnet ist, so gelangt man durch die $i$malige Anwendung jener beiden Gleichungen 6. und 1., da $n = m + 2i$ ist, schliesslich zu einem einzigen homogenen Gliede. Das theilweise Integral besteht dann aus $2i$ Gliedern $s(n, m)$, und lässt sich in der folgenden Form anschreiben:

7. $$(1-e^2)\int\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v\, dt = \Sigma A_k\, s(n+2-2k, -m) - \Sigma B_k\, s(n+1-2k, m+1) + A_{k+1}(1-e^2)\int\left(\frac{r}{p}\right)^m \cos m v\, dt,$$

wo unter dem Summenzeichen der Buchstabe k der Reihe nach die Zahlenwerthe $1, 2, 3 \dots i$ erhält.

Um die Coefficienten $A_1\, A_2 \dots B_1\, B_2 \dots$ zu bestimmen, bilde man aus den Gleichungen 6. und 1., nachdem man in 1. die Buchstaben n und m beziehungsweise gegen $n-1$ und $m+1$ vertauscht hat, die folgende:

$$A_1 s(n, -m)' - B_1 s(n-1, m+1)' = A_1(1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v - \left(B_1(1-e^2) - A_1 e\,\frac{2n+1}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(m+1)v$$
$$-\left(B_1 e\,\frac{2n-1}{n} + A_1\,\frac{n+1+m}{n+1}\;\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v \;+ B_1\,\frac{n-1-m}{n}\;\frac{n-2-m}{n-1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-3}\cos(m+1)v.$$

Setzt man $A_1 = 1$, so folgt weiter, weil das zweite Glied der rechten Seite verschwinden soll, $B_1 = \frac{2n+1}{n+1}\,\frac{e}{1-e^2}$.

Nun vertausche man n gegen $n-2$, und gleichzeitig A_1 und B_1 gegen A_2 und B_2. Die vorige Gleichung geht dann über in:

$$A_2 s(n-2, -m)' - B_2 s(n-3, m+1)' = A_2(1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v - \left(B_2(1-e^2) - A_2 e\,\frac{2n-3}{n-1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-3}\cos(m+1)v$$
$$-\left(B_2 e\,\frac{2n-5}{n-2} + A_2\,\frac{n-1+m}{n-1}\;\frac{n-2+m}{n-2}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-4}\cos m v \;+ B_2\,\frac{n-3-m}{n-2}\;\frac{n-4-m}{n-3}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-5}\cos(m+1)v.$$

Man addire diese Gleichung zu der vorigen. Damit bei der Addition die Glieder $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v$ und $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-3}\cos(m+1)v$ verschwinden, stellt man zur Bestimmung der Coefficienten A_2 und B_2 die folgenden Gleichungen auf:

$$A_2(1-e^2) = A_1\left(1+\frac{m}{n+1}\right)\left(1+\frac{m}{n}\right) + B_1 e\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$B_2(1-e^2) = B_1\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n-1}\right) + A_2 e\left(2-\frac{1}{n-1}\right).$$

Es ist nun auch das Gesetz der allgemeinen Coefficientenbildung ersichtlich. Vertauscht man n gegen $n-2k$, so hat man die allgemeinen Coefficienten:

$$8.\quad \begin{aligned} A_{k+2}(1-e^2) &= A_{k+1}\left(1+\frac{m}{n+1-2k}\right)\left(1+\frac{m}{n-2k}\right)+B_{k+1}\,e\left(2-\frac{1}{n-2k}\right)\\ B_{k+2}(1-e^2) &= B_{k+1}\left(1-\frac{m+1}{n-2k}\right)\left(1-\frac{m+1}{n-1-2k}\right)+A_{k+2}\,e\left(2-\frac{1}{n-1-2k}\right). \end{aligned}$$

Da sich das homogene Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^m \cos mv$ durch m Glieder $s\,(m)$ integrirt, so sieht man, dass das vollständige Integral des nicht homogenen Gliedes gerader Stufe $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos mv$ aus $2i + m = n$ Gliedern $s\,(n, m)$ zusammengesetzt ist, in welchen die Buchstaben n und m der Reihe nach verschiedene Zahlenwerthe erhalten.

Vertauscht man in den Gleichungen 1. und 6. den Winkel $m\,v$ gegen $m\,v + \frac{\pi}{2}$, so erhält man zwei entsprechende Gleichungen zur Integration des nicht homogenen Gliedes gerader Stufe $\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m\,v$. Man gebrauche in dieser Absicht die Abkürzung:

$$c\,(n, m) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\cos m\,v + \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin v \sin m\,v,$$

und bemerke, dass durch jene Vertauschung $s\,(n, m)$ in $c(n, m)$ und $s(n, -m)$ in $-c(n, -m)$ übergeht. Die erwähnten Gleichungen gehen über in:

$$1'.\quad -c\,(n, m)' = (1-e^2)\left(\frac{p}{r}\right)^n \sin m\,v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin(m-1)\,v - \frac{n+1-m}{n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\sin m\,v$$

$$6'.\quad c\,(n, -m)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m\,v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin(m+1)\,v - \frac{n+1+m}{n+1}\,\frac{n+m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\sin m\,v.$$

Man gelangt schliesslich zu der Gleichung:

$$7'.\quad \begin{aligned} (1-e^2)\int\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m\,v\,dt &= \Sigma A_k\, c\,(n+2-2k, -m) + \Sigma B_k\, c\,(n+1-2k, m+1)\\ &\quad + A_{i+1}(1-e^2)\int\left(\frac{r}{p}\right)^m \sin m\,v\,dt, \end{aligned}$$

wo unter dem Summenzeichen der Buchstabe k der Reihe nach die Zahlenwerthe $1, 2, 3 \ldots i$ erhält, weil $n - m = 2\,i$ angenommen ist.

Das nicht homogene Glied der ungeraden Stufe lässt sich leicht auf Glieder der geraden Stufe zurückführen. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichung 4. Vertauscht man darin m gegen $-m$, so geht sie über in:

$$9.\quad -\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m\,v\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos m\,v + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(m+1)\,v - \frac{n+m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m\,v.$$

Da man hierdurch irgend ein nicht homogenes Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos mv$ auf zwei andere zurückführen kann, deren Stufe um die Einheit kleiner ist, so hat man das verlangte Ziel erreicht.

Indem man wieder $m\,v$ gegen $m\,v + \frac{\pi}{2}$ vertauscht, erhält man die entsprechende Gleichung:

9: $$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \sin m v + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin (m+1) v - \frac{n+m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \sin m v .$$

Es mag hier noch die Bemerkung am Platz sein, dass in der Entwicklung der Störungsfunktion ausser den homogenen Störungsgliedern nur nicht homogene der geraden Stufe vorkommen. Dem gemäss können auch die Störungsgleichungen so eingerichtet werden, dass ausser den soeben erwähnten keine andern Störungsglieder in denselben eine Stelle finden.

Die Resultate, welche in diesem und in dem vorhergehenden Paragraphen entwickelt worden sind, habe ich schon im Jahre 1869, in Nro. 1784 der Astronomischen Nachrichten veröffentlicht.

§ 22. Weiteres über die Integrale der im Vorstehenden integrirten Störungsglieder.

Jene Funktion $s(n)$, mit deren Hilfe das homogene Störungsglied integrirt worden ist, besteht aus zwei verschiedenen veränderlichen Bestandtheilen. Es ist:

$$s(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n v - \frac{e}{n+1} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos n v .$$

Ueber deren Beschaffenheit mag hier bemerkt werden, dass der erstere die Form eines homogenen Gliedes hat, der andere als die Differenz eines homogenen Gliedes und eines nicht homogenen der zweiten Stufe angesehen werden kann. Denn es besteht die identische Gleichung:

$$2\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos n v = \left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin (n+1) v - \left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin (n-1) v .$$

Dies gibt einen Anhaltspunkt bei der Erörterung der Frage, in wie weit etwa die einzelnen Bestandtheile der aufeinander folgenden Funktionen $s(n)$ gleichartige Funktionen darstellen. Ausgehend von der Gleichung:

$$1 = \left(\frac{p}{r} - e \cos v\right)^2, \qquad \text{oder} \qquad 1 - \frac{e^2}{2} = \left(\frac{p}{r}\right)^2 - 2\frac{p}{r} e \cos v + \frac{e^2}{2} \cos 2 v$$

multiplicire ich dieselbe mit $\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \cos n v$. Mittels der neuen Gleichung führt man ein nicht homogenes Glied der zweiten Stufe auf ein homogenes zurück. Man erhält nebenbei noch andere, mit e multiplicirte Glieder, welche aber nicht blos homogene und nicht homogene der zweiten Stufe sind, da sich unter denselben auch ein nicht homogenes der vierten Stufe befindet. Hiernach ist es unmöglich, ein nicht homogenes Glied der zweiten Stufe durch eine begrenzte Anzahl homogener Glieder zu ersetzen, und man gelangt zu dem Schlusse, dass die n verschiedenen Funktionen $s(n)$, welche das vollständige Integral des homogenen Störungsgliedes zusammensetzen, als $2n$ unter sich verschiedene veränderliche Bestandtheile zu betrachten sind.

Das Gleiche kann auch über die n aufeinanderfolgenden Funktionen $s(n, m)$ ausgesagt werden, aus welchen das vollständige Integral des nicht homogenen Gliedes gerader Stufe $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v$ zusammengesetzt ist. Auch diese Funktionen enthalten im Ganzen $2n$ unter sich wesentlich verschiedene Bestandtheile.

Wenn man die vorhin vorgeschlagene Verwendung der Gleichung:

$$\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\cos m v = \left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos m v - 2\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\cos v \cos m v + \frac{e^2}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\cos 2 v \cos m v$$

mehrmals nacheinander machen will, so kann man ein nicht homogenes Glied gerader Stufe auf homogene Glieder zurückführen, und auf andere nicht homogene Glieder gerader Stufe, deren Coefficienten übrigens mit einer gewissen Potenz von e multiplicirt sind. In so fern es sich nur um einen genäherten Werth des Integrals handelt, dürfte man die letztgenannten Glieder vernachlässigen. Nur in diesem Sinne ist die Möglichkeit gegeben, die $2n$ veränderlichen Bestandtheile im Integrale des Gliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v$ durch eine begrenzte Anzahl homogener Glieder zu ersetzen, welche kleiner ist als $2n$.

Es besteht die identische Gleichung:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos m v - \left(\frac{r}{p}\right)^n e \cos v \cos m v,$$

mit deren Hilfe man ein nicht homogenes Glied gerader Stufe in drei andere Glieder umwandeln kann, welche sich als nicht homogene ungerader Stufe darstellen. Daraus erklärt es sich, dass bei der Integration eines Störungsgliedes unter Umständen auch eine andere Anordnung getroffen werden kann, derzufolge die einzelnen Bestandtheile des Integrals sich als nicht homogene Glieder ungerader Stufe zeigen, während man oben nur zu homogenen und nicht homogenen gerader Stufe gelangt ist.

Ich betrachte, um hierzu ein Beispiel vor Augen zu haben, das Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos n v$, dessen Integral in einer ähnlichen Reihe ausgedrückt werden kann, wie sie oben für das Integral des homogenen Gliedes aufgestellt worden ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur in der Gleichung 1. $n+1=m$ zu setzen. Auch diesmal verschwindet das dritte Glied dieser Gleichung, und das obige Störungsglied wird durch die theilweise Integration auf ein anderes gleichartiges Glied zurückgeführt. Macht man die Annahme $m=n+1$, und alsdann noch die Vertauschung $n+1$ gegen n, so geht die Gleichung 1. über in die neue:

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\sin n v - \left(\frac{r}{p}\right)^n e \sin v \cos n v\right)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos n v + \frac{2n-1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} e\cos(n-1)v,$$

durch welche das obengenannte Glied auf das gleichartige $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos(n-1)v$ zurückgeführt werden kann.

Nachdem man diese Reduction $n-1$ mal nach einander ausgeführt hat, gelangt man schliesslich nicht, wie bei der Integration des homogenen Gliedes, zu einer beständigen Grösse, sondern man hat schliesslich noch das veränderliche Glied $\cos v$ nach t zu integriren. Das Integral desselben könnte durch die obige Gleichung 5. bestimmt werden, wo dann $n=1$ zu setzen ist. Auch die übrigen Glieder der auf diesem Wege erzielten Reihe sind nicht gleichartig mit denjenigen, welche das Integral des homogenen Störungsgliedes zusammensetzen. Man hat es hier mit nicht homogenen Gliedern der ungeraden Stufe zu thun, während dort nur homogene und nicht homogene der zweiten Stufe vorkommen. Um nicht die Gleichförmigkeit der Integrale zu stören, da dieselben im Obigen ausnahmslos durch Glieder gerader Stufe ausgedrückt worden sind, dürfte man übrigens von dem vorliegenden Integrale des Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos n v$ keinen Gebrauch machen. Es ist schon oben der Vorschlag gemacht worden, dasselbe sofort auf ein homogenes Glied vermittelst der Reductionsgleichung 5. zurückzuführen.

§ 23. Eine andere Verwendung der Reductionsgleichungen.

Ich habe den Fall betrachtet, wo die Stufe des Störungsgliedes um eine Einheit erhöht werden müsste, um dasselbe zu einem homogenen Gliede zu machen. Man kann die Stufe des Störungsgliedes auch um mehr als eine Einheit erhöhen. Um dies zu bewerkstelligen, bedarf es keiner neuen Reductionsgleichung. Auch dazu dient die Gleichung 1.:

$$s(n,m)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos(m-1)v - \frac{n+1-m}{n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v\,.$$

Man betrachte das letzte Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v$ dieser Gleichung als das zu reducirende. Dasselbe wird hierdurch auf zwei andere Glieder zurückgeführt, welche beide eine um zwei Einheiten höhere Stufe haben. Mittels der Gleichung 6. kann man alsdann von den beiden neuen Gliedern das eine beseitigen, indem man ein anderes Glied an die Stelle setzt, dessen Stufe um vier Einheiten höher ist als die des ursprünglichen Gliedes. In der Gleichung 6. vertauscht man desshalb n und m beziehungsweise gegen $n+1$ und $m-1$. Dieselbe geht über in:

$$s(n+1,-m+1)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\cos(m-1)v + \frac{2n+3}{n+2}\cdot\left(\frac{r}{p}\right)^n e\cos m v - \frac{n+1+m}{n+2}\,\frac{n+m}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(m-1)v.$$

Die Elimination des Gliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos m v$ aus den Gleichungen 1. und 6. führt zu einer neuen Gleichung, durch welche das Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v$ auf zwei andere Glieder zurückgeführt wird, deren Stufe beziehungsweise um zwei und um vier Einheiten höher ist als die des erstgenannten Gliedes. In das theilweise Integral sind auf diesem Wege zwei Funktionen von der Form $s(n,m)$ eingegangen. Indem man die Gleichungen 1. und 6. wiederholt in Anwendung bringt, werden jedesmal zwei weitere Funktionen $s(n,m)$ in das theilweise Integral eingeführt, und es werden zugleich an die Stelle der beiden vorher erhaltenen Glieder zwei andere gesetzt, deren Stufe beziehungsweise um zwei Einheiten höher ist.

Die Coefficienten der aufeinanderfolgenden Funktionen $s(n,m)$ in dem theilweisen Integrale lassen sich leicht bestimmen. Multiplicirt man die Gleichungen 1. und 6., nachdem man in 6. die obige Vertauschung m gegen $m-1$ und n gegen $n+1$ angebracht hat, beziehungsweise mit $A_,$ und $B_,$, so entsteht durch die Addition:

$$A_, s(n,m)' + B_, s(n+1,-m+1)' = B_,(1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\cos(m-1)v + \left(A_,(1-e^2) + B_, e\frac{2n+3}{n+2}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos m v$$
$$+\left(A_, e\frac{2n+1}{n+1} - B_,\frac{n+1+m}{n+2}\,\frac{n+m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(m-1)v \qquad - A_,\frac{n+1-m}{n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v.$$

Setzt man $A_, = 1$, so ist, weil der Coefficient von $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(m-1)v$ verschwinden soll,

$$B_, = e\,\frac{2n+1}{n+m}\,\frac{n+2}{n+1+m}\,.$$

Vertauscht man in der vorstehenden Gleichung n gegen $n+2$, ferner A_1 und B_1 beziehungsweise gegen A_2 und B_2, so geht sie über in:

$$A_2 s(n+2, m)' + B_2 s(n+3, -m+1)' = B_2 (1-e^2) \left(\frac{r}{p}\right)^{n+3} \cos(m-1)v + \left(A_2 (1-e^2) + B_2 e \frac{2n+7}{n+4}\right) \left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \cos m v$$
$$+ \left(A_2 e \frac{2n+5}{n+3} - B_2 \frac{n+3+m}{n+4} \frac{n+2+m}{n+3}\right) \left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \cos(m-1)v \qquad - A_2 \frac{n+3-m}{n+3} \frac{n+2-m}{n+2} \left(\frac{r}{p}\right)^{n} \cos m v$$

Man addire diese beiden Gleichungen, um alsdann die Coefficienten von $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v$ und $\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \cos(m-1)v$ verschwinden zu lassen. Es ergeben sich dabei die Werthe:

$$A_2 = \frac{A_1 (1-e^2)(n+2) + B_1 e (2n+3)}{n+2-m} \, \frac{n+3}{n+3-m}$$

$$B_2 = \frac{B_1 (1-e^2)(n+3) + A_2 e (2n+5)}{n+2+m} \, \frac{n+4}{n+3+m}.$$

Indem man $n+2$ mit $n+2k$ vertauscht, erhält man die allgemeinen Coefficienten:

10.

$$A_{k+1} = \frac{A_k (1-e^2)(n+2k) + B_k e (2n-1+4k)}{n+2k-m} \, \frac{n+1+2k}{n+1+2k-m}$$

$$B_{k+1} = \frac{B_k (1-e^2)(n+1+2k) + A_{k+1} e (2n+1+4k)}{n+2k+m} \, \frac{n+2+2k}{n+1+2k+m}.$$

Wiewohl nun im Allgemeinen Nichts im Wege steht, die Stufe des Störungsgliedes zu erhöhen, so ist es doch nicht möglich, ein Störungsglied von der Form $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos m v$, in welchem $n < m+1$ ist, dessen Stufe also um mehr als eine Einheit erhöht werden müsste, damit ein homogenes Glied vorliegt, auf ein solches zurückzuführen, was für alle diejenigen nicht homogenen Störungsglieder, in welchen $n > m$ angenommen ist, geschehen konnte. Denn die Gleichung 1. versagt ihren Dienst, wenn der Exponent um zwei oder um drei Einheiten erhöht werden müsste, damit ein homogenes Glied vorliegt. Legt man dem letzten Gliede der Gleichung 1. diese Eigenschaft bei, was für die Fälle $n = m$ und $n = m-1$ zutrifft, so fällt dasselbe aus der Gleichung weg, weil sein Coefficient verschwindet. Daraus folgt, dass die erwähnte Reduction unmöglich ist.

Es steht nun allerdings noch eine andere Gleichung zur Verfügung, wenn es sich darum handelt, die Stufe des Störungsgliedes zu erhöhen. Dies ist die obige Gleichung 4.:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v\right)' = (m-n)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos m v + n \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \left(\cos m v + e \cos(m-1)v\right).$$

Indem man hier $n = m-1$ setzt, ist man in den Stand gesetzt, das Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^{m-3} \cos m v$ auf zwei andere zurückzuführen, deren Stufe beziehungsweise um eine und um zwei Einheiten höher ist. Für den Fall $n = m$ aber ist auch diese Gleichung unbrauchbar, und es bleibt die Frage offen, wie anders man das Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos n v$ zu integriren habe.

Wiewohl die Reduction des Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos n v$ auf homogene Glieder unmöglich ist, so kann daraus doch nicht geschlossen werden, dass die Integration überhaupt nicht in einer endlichen

Form ausgeführt werden könne. Algebraische Funktionen sind dazu allerdings nicht ausreichend; aber man kommt vermittelst logarithmischer Funktionen oder Kreisfunktionen zum Ziele. Sehr leicht integrirt sich das vorliegende Störungsglied für den Fall $n = 1$. Man findet:

$$\int \frac{p}{r} \cos v \, dt = \frac{1}{e} \int \left(\left(\frac{p}{r} \right)^2 - \frac{p}{r} \right) dt = \frac{v}{e} - \frac{\varepsilon}{e \sqrt{1 - e^2}},$$

wo ε die excentrische Anomalie ist. Eben so leicht findet man das Integral:

$$\int \frac{p}{r} \sin v \, dt = \frac{1}{e} \int \frac{p}{r} \left(\frac{r}{p} \right)' dt = \frac{1}{e}\, l \left(\frac{r}{p} \right).$$

Diese beiden Integrale haben indessen den Faktor $\frac{1}{e}$, welchem man hier zum Erstenmale begegnet, da sonst überall nur positive Potenzen von e in den Coefficienten vorkommen.

Das obige allgemeinere Störungsglied, worin die Zahl $n > 0$ gedacht wird, lässt sich durch Heranziehen algebraischer Glieder auf den Fall $n = 1$ zurückführen. Von der Derivirten:

$$\frac{1}{n-1} \left(\left(\frac{r}{p} \right)^{n-1} \sin (n-1) v \right)' = \left(\frac{r}{p} \right)^{n-3} \cos (n-1) v + e \left(\frac{r}{p} \right)^{n-2} \sin (n-1) v \sin v$$

ausgehend stellt man ohne Weiteres die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{n-1} \frac{2}{e} \left(\left(\frac{r}{p} \right)^{n-1} \sin (n-1) v \right)' = \frac{2}{e} \left(\frac{r}{p} \right)^{n-3} \cos (n-1) v - \left(\frac{r}{p} \right)^{n-2} \cos n v + \left(\frac{r}{p} \right)^{n-3} \cos (n-2) v.$$

Hiernach kann das Störungsglied $\left(\frac{r}{p} \right)^{n-2} \cos n v$ auf ein anderes derselben Art und auf ein homogenes Glied zurückgeführt werden. In dem ursprünglichen Gliede ist $n > 1$ gedacht, in dem neuen gleichartigen Gliede aber ist eine um die Einheit kleinere Zahl an die Stelle getreten. Es darf dabei aber nicht übersehen werden, dass das neue Glied wieder den Faktor $\frac{1}{e}$ hat.

Unter den Störungsgliedern der ersten Ordnung finden sich in allen Störungsgleichungen immer nur die in den vorausgehenden Paragraphen integrirten. Formen. Wenn man aber in der Integration der Störungsgleichungen zu den Gliedern der zweiten und höheren Ordnung fortgeschritten ist, so kommt auch das soeben integrirte Glied in Betracht, dessen Exponent um zwei und mehr Einheiten grösser gemacht werden müsste, damit ein homogenes Glied vorliegt.

In den soeben aufgestellten Integralen der Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p} \right)^{n-2} \cos n v \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{r}{p} \right)^{n-2} \sin n v$$

kommen der Reihe nach die Coefficienten $\frac{1}{e} \frac{1}{e^2} \cdots \frac{1}{e^n}$ vor. Die einzelnen Bestandtheile dieser Integrale stellen desshalb grosse Zahlenwerthe dar, so lange vorausgesetzt werden muss, dass die Excentricität e ein kleiner Bruchwerth sei. Es kann daraus aber nicht geschlossen werden, dass das vollständige Integral des Störungsgliedes gleichfalls einen grossen Zahlenwerth darstelle. Man findet vielmehr, dass dies nicht der Fall ist, da nämlich die mit negativen Potenzen von e multiplicirten Glieder, welche in jener endlichen Form des Integrals unvermeidlich sind, ohne Ausnahme wegfallen, sobald man alle Bestandtheile

des Integrals nach Potenzen von e entwickelt. Aus diesem Grunde ist die endliche Form des Integrals der beiden obigen Störungsglieder für den Fall, dass e ein kleiner Bruchwerth sei, nicht gut verwendbar, und es hat die unendliche Reihe, welche nur positive Potenzen von e enthält, den Vorzug. Man kann dieselbe auf folgende Weise herleiten. Man schreibe zunächst die Derivirten:

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\sin n v\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos n v - \frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\Big(\cos(n+1)v - \cos(n-1)v\Big)$$

$$\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin(n+1)v\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(n+1)r - \frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\Big(\cos(n+2)v - \cos n v\Big)$$

$$\frac{1}{n+2}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin(n+2)v\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos(n+2)v - \frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\Big(\cos(n+3)v - \cos(n+1)v\Big),$$

u. s. w. Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $1, \frac{e}{2}, \left(\frac{e}{2}\right)^2 \cdots$, um alsdann deren Summe zu nehmen, so gelangt man zu der folgenden Entwicklung:

$$11.\quad \left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos n v = \left(\frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)\sin n v + \frac{1}{n+1}\frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin(n+1)v + \frac{1}{n+2}\left(\frac{e}{2}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin(n+2)v + \ldots\right)'$$
$$- \frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(n-1)v - \left(\frac{e}{2}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos n v - \left(\frac{e}{2}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\cos(n+1)v - \cdots$$

Das Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos n v$, worin n als positive ganze Zahl angenommen ist, lässt sich hiernach auf eine unendliche Reihe homogener Glieder zurückführen, welche bei hinreichend kleinem e schnell convergirt. Die Integration dieses Störungsgliedes führt schliesslich zu einer unendlichen Reihe, deren Glieder durch die Funktion $s(n)$ ausgedrückt sind.

Ich habe nun gezeigt, wie man das Integral des Störungsgliedes$\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v$ auch für den Fall $n < m+1$ durch verschiedene Funktionen $s(n, m)$ ausdrücken kann. Es sind die negativen Potenzen der Excentricität e dabei vermieden; aber man ist genöthigt, zu einer unendlichen Reihe Zuflucht zu nehmen, während für den Fall $\geqq m+1$ das Integral jedesmal in einem geschlossenen Ausdrucke vorliegt. Da m als positive Zahl gedacht wird, so ist der Fall, dass die Zahl $n < 1$ sei, in dem zuletzt besprochenen Falle $n < m+1$ einbegriffen. Dem ungeachtet sind die hier mitgetheilten Resultate nur so lange giltig, als nicht $n < 1$ ist. Es zeigt sich, dass die mit Hilfe der Gleichungen 1. und 6. ausgeführte Reduction des Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v$, wenn $n < 1$ angenommen wird, nicht mehr zu jenem Gliede $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos n v$ führt, dessen Anwesenheit die unendliche Reihe nothwendig gemacht hat. Man findet vielmehr, dass in diesem Falle das Integral wieder durch eine begrenzte Anzahl Glieder ausgedrückt werden kann. Dies hat seinen Grund darin, dass die vorhin unter 10. aufgestellten Coefficienten von einer gewissen Stelle an verschwinden, wenn $n < 1$ angenommen wird. Für $n = o$ insbesondere gestaltet sich die Reduction sehr einfach. Die Gleichung 1. geht dann über in:

$$(\sin m v)' = m\left(\frac{r}{p}\right)^{-2}\cos m v.$$

Wiewohl im Allgemeinen die hier besprochene Reduction des Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m v$ an die-

Stelle von n eine um zwei Einheiten grössere Zahl setzt, erhält die Grösse n bei wiederholter Anwendung der Reduction schliesslich doch nur den Werth Null. Man gelangt aber niemals zu einem Werthe $n > 0$.

Es gibt bekanntlich noch ein anderes Verfahren, durch welches das Integral des Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos mv$ in einer begrenzten Anzahl Glieder seinen Ausdruck findet, wenn $n < 1$ angenommen ist. Indem man noch $\left(\frac{p}{r}\right)^2 dt = dv$ setzt, erhält man:

$$\int\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m\,v\,dt = \int\left(\frac{p}{r}\right)^{-n}\cos m\,v\,dv\,.$$

Da nach der Voraussetzung $n < 1$, oder $-n > -1$ ist, so sieht man, dass die binomische Entwicklung $(1+e\cos v)^{-n}$ zu einer begrenzten Reihe führt. Das auf diesem Wege erzielte Integral ist gleichfalls eine begrenzte Reihe. Dasselbe zeigt sich aber als Funktion von v allein, während sich vorhin das Integral als gemischte Funktion von $\frac{r}{p}$ und v dargestellt hat.

Bei der Integration der Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos m\,v \qquad \text{und } \left(\frac{r}{p}\right)^n\sin m\,v$$

bin ich in dem Bisherigen von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Excentricität ein kleiner Bruchwerth sei. Es ist in dem reducirten Gliede überall der Nenner e vermieden worden, weil dasselbe in Verbindung mit einem solchen Nenner einen grösseren Zahlenwerth darstellen würde als das zu reducirende Glied. Die nun aufgestellten Integrale sind demzufolge zwar unter der Voraussetzung, dass e ein kleiner Bruchwerth sei, nicht aber für die sonst noch in der Störungstheorie vorkommenden Werthe e brauchbar. Wenn e nahe bei der Einheit liegt, wenn also der in den obigen Integralen vorkommende Nenner $1-e^2$ einen kleinen Bruchwerth ausdrückt, so leiden dieselben auch wieder an dem Gebrechen, dass die fortschreitenden Glieder immer grösser werden. Dieser Umstand zeigt die Nothwendigkeit, dass hier die im Bisherigen gegebene Form des Integrals aufgegeben werde. Doch kann man sich immer wieder der bisherigen Reductionsgleichungen bedienen, um das Integral darzustellen.

Mittelst der Gleichung 2.:

$$s(n)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos n\,v + \frac{2\,n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}e\cos(n-1)\,v$$

führt man das homogene Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(n-1)\,v$ auf ein anderes derselben Art zurück, dessen Grad um die Einheit höher ist. Wenn genau $e-1=0$ ist, was für manche Kometenbahnen angenommen werden darf, so gibt schon das erste Glied der auf diesem Wege erhaltenen Reihe das vollständige Integral. Setzt man $e=1$, so behält man die Gleichung 2. in der einfachen Form:

$$\frac{n+1}{2\,n+1}\,s(n)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(n-1)\,v\,.$$

Hiermit ist das vollständige Integral des homogenen Gliedes für den Fall $e=1$ gegeben.

Mittelst der allgemeineren Gleichung 1.:

$$s(n,m)' = (1-e^2)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m\,v + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(m-1)\,v - \frac{n+1-m}{n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos m\,v$$

kann man irgend ein nicht homogenes Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(m-1)\,v$ auf ein anderes derselben Stufe zurückführen, dessen Grad um die Einheit höher ist, und auf ein zweites Glied, welches eine um zwei Einheiten niedrigere Stufe hat. Für den Fall $e^2 - 1 = o$ fällt von den neuen Gliedern das erstere weg, und man gelangt durch die i malige Anwendung dieser Reduction, da $n = m + 2i$ angenommen ist, schliesslich zu einem homogenen Gliede. Setzt man $e = 1$, so schreibt sich die Gleichung 1.:

$$\frac{n+1}{2n+1}\,s(n,m)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos(m-1)\,v - \frac{n+1-m}{2n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-3}\cos m\,v,$$

mit deren Hilfe die Stufe des nicht homogenen Störungsgliedes um zwei Einheiten erniedrigt werden kann.

§ 24. Ueber die Integration zweifacher Störungsglieder.

Wir wenden uns jetzt zu den allgemeineren Störungsgliedern:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}} \cos(m\,v - m_{,}\,v_{,}), \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}} \sin(m\,v - m_{,}\,v_{,}),$$

welche im Vorstehenden für den besonderen Fall $m_{,} = o$, $n_{,} = o$ integrirt worden sind. Die Benennung eines zweifachen Störungsgliedes soll darin ihre Begründung haben, dass es sich um eine Funktion der zwei Veränderlichen v und $v_{,}$ handelt. Man könnte sich, um deren Integration zu bewerkstelligen, der Methode der variirten Näherung bedienen. Denn wenn man in den obigen Störungsgliedern den Winkel $v_{,}$ als Beständige betrachtet, so ergeben sich durch die Integration keine andern Funktionen von v als die im Bisherigen für den besonderen Fall $m_{,} = o$, $n_{,} = o$ hergeleiteten. Man müsste diese Integrale, die Veränderliche $v_{,}$ allein als Funktion der Zeit betrachtend differentiiren, und alsdann abermals integriren. Man würde so die erste Correction des im Bisherigen aufgefundenen Integrals erhalten. Bei dieser Gelegenheit kommt die Gleichung $v_{,}' = \lambda\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2$ zur Verwendung. Unter der Voraussetzung, dass die Bahn des einen Körpers von der des andern vollständig eingeschlossen sei, ist in der obigen Form der Störungsglieder der Leitstrahl der inneren mit r, und der Leitstrahl der äussern Bahn mit $r_{,}$ bezeichnet worden. Da nun λ das Verhältniss der mittleren Bewegung in der äusseren Bahn zu der in der inneren Bahn ausdrückt, so ist $\lambda < 1$, und es versteht sich, dass das schon aufgefundene Integral des einfachen Störungsgliedes den Hauptbestandtheil des gesuchten vollständigen Integrals ausmacht.

Auf diesem Wege würde man übrigens zu einer Reihe von oftmals nicht sehr beträchtlicher Convergenz gelangen. Denn wenn auch $\lambda < 1$ ist, so stellt dasselbe in vielen Fällen doch einen immerhin noch ansehnlichen Bruchwerth dar; in der Theorie des Mondes ist beiläufig $\lambda = \frac{1}{13}$. Für den Fall, dass der Coefficient $m_{,}$ etliche Einheiten enthält, würde die Convergenz auch in der Theorie des Mondes

noch sehr schwach ausfallen. Ich werde desshalb zum Behufe der Integration einen anderen Weg einschlagen, welcher zu weit stärker convergenten Reihen führt.

Die einfachen Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v\,, \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v$$

sind im Vorstehenden vermittelst der beiden Funktionen:

$$s(n,m) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin m v - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos m v$$

$$c(n,m) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos m v + \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \sin m v$$

integrirt worden. Deren vollständiges Integral enthält n derartige Funktionen. Die Integrale der obigen zweifachen Störungsglieder sind zusammengesetzter. Allein unter den neu hinzukommenden Gliedern findet sich eine grosse Anzahl solcher, welche gleichartig sind mit den schon vorhandenen. Ich beabsichtige, zunächst nur diese Glieder hinzuzufügen, und alsdann erst die übrigen Glieder des Integrals aufzustellen, welche mit den schon bekannten nicht gleichartig sind. Ich nehme desshalb an, dass die Bahn des einen Körpers, von welcher die Bahn des andern Körpers eingeschlossen gedacht wird, die Kreisform habe, dass also $e_{,} = 0$ sei. Die Vollständigkeit der obigen allgemeineren Störungsglieder erleidet durch diese Annahme allerdings abermals eine Einbusse; allein die schon integrirte Form ist dann doch nur ein besonderer Fall der jetzt vorliegenden. Da jetzt wegen der Kreisform der äusseren Bahn $r_{,} = \lambda t$ angenommen ist, so hat man die beiden einfacheren Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos(m v - \alpha t)\,, \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n \sin(m v - \alpha t)\,,$$

wo abkürzend $m_{,}\lambda = \alpha$ gesetzt ist.

Nachdem man dieselben integrirt hat, gelangt man leicht auch zu dem Integral der allgemeinen Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}} \cos(m v - m_{,} v_{,}), \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}} \sin(m v - m_{,} v_{,})\,.$$

Da hier die äussere Bahn nicht mehr die Kreisform haben soll, so handelt es sich um die Correction der gefundenen Integrale wegen der elliptischen Form dieser Bahn. Durch die Annahme $e_{,} = 0$ haben die Störungsglieder selbst eine Aenderung erlitten. Man kann indessen die dem Falle $e_{,} = 0$ entsprechenden Integrale auch aus den ungeänderten Störungsgliedern herleiten, indem man bei der Integration von einer anderen Annahme ausgeht. Man betrachte in dem Werthe des Verhältnisses $\frac{p_{,}}{r_{,}}$ den Winkel $v_{,}$ als Beständige. Gleichzeitig schreibe man in dem andern Factor des Störungsgliedes $m_{,} v_{,} = \alpha t + (m_{,} v_{,} - \alpha t)$, wo $\alpha = m_{,}\lambda$ ist, um bei der Integration den Ausdruck $m_{,} v_{,} - \alpha t$ gleichfalls als Beständige zu betrachten. Man differentiire das dieser Annahme entsprechende Integral, die beiden Grössen $\frac{p_{,}}{r_{,}}$ und $m_{,} v_{,} - \alpha t$ allein als Funktion der Zeit betrachtend. Alsdann integrire man die entstandene Derivirte, und man hat die erste Correction des Integrals. Die Derivirte $v_{,}' = \lambda \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2$ führt zu den beiden Gleichungen:

$$\left(\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}}\right)' = -n_{,}\lambda e_{,}\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}+1}\sin v_{,}\,, \qquad (m_{,}v_{,}-\alpha t)' = m_{,}\lambda e_{,}\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}+1\right)\cos v_{,}\,;$$

und man sieht nun, dass man wegen der geringen Grösse des Faktors $\lambda e_{,}$ zu einer viel stärker convergenten Reihe gelangt als oben. In der Theorie des Mondes ist beiläufig $\lambda e_{,} = \frac{1}{13 \cdot 60} = \frac{1}{780}$; und wenn nicht die ganzzahligen Faktoren $m_{,}$ und $n_{,}$ wären, von denen der eine oder der andere zu der Derivirten der Correction hinzutritt, so würde eine einzige Variation hinreichen, um dem Integrale die Genauigkeit von 0,1 Bogensekunde zu geben.

Man kann sich nun leicht überzeugen, dass es zweckmässig ist, nach der obigen Vorschrift die Correction wegen der elliptischen Form der äusseren Bahn von den schon bekannten Bestandtheilen des Integrals zu trennen. Denn aus der Anwesenheit der Faktoren $\cos v_{,}$ und $\sin v_{,}$ in den obigen Derivirten folgt, dass diese Correction kein einziges Glied enthält, welches gleichartig ist mit irgend einem Gliede der schon bekannten Bestandtheile. Während jedes der schon aufgefundenen Glieder den Factor $\cos(u - iv)$ oder den Factor $\sin(u - iv)$ hat, wo abkürzend $mv - m_{,}v_{,} = u$ gesetzt ist, findet sich in den der Correction entsprechenden Gliedern jedesmal der Faktor $\cos(u - iv \pm v_{,})$ oder der Factor $\sin(u - iv \pm v_{,})$.

Auf einen Ausnahmsfall muss noch hingewiesen werden, in welchem die Correction des Integrals wegen der elliptischen Form der äusseren Bahn beträchtlich mehr ausmacht als oben vorgesehen ist. Wenn nämlich die Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}}\cos m_{,}v_{,}\,, \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^{n}\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}}\sin m_{,}v_{,}\,,$$

welche dem besonderen Falle $m = 0$ entsprechen, nach der gegebenen Vorschrift integrirt werden, so ist der Hauptbestandtheil des Integrals eine Funktion von $v_{,}$ allein. Die Correction dieses Bestandtheils erhält nicht mehr den Faktor λ, und ist desshalb beträchtlich grösser als in jedem andern Falle.

Die Veranlassung zu jener Annahme, wonach die Integrale der Störungsglieder gemischte Funktionen von v und $v_{,}$ sein sollen, wie sie im § 19 gegeben ist, habe ich schon im § 27 Pbl. III besprochen. Auch ist im § 35 Pbl. III die Meinung ausgesprochen, dass es zweckmässig sein möchte, neben v und $v_{,}$ zugleich die Leitstrahlen r und $r_{,}$ in die Integrale einzuführen. Die dort gegebenen Methoden, welche zu einer solchen Darstellung führen sollen, sind indessen noch zu unvollkommen, um mehr zu leisten als etwa den Nachweis für die Möglichkeit des Beabsichtigten. Insbesondere ist dort die Einführung des Leitstrahls noch dadurch erschwert, dass der Einfluss der als veränderlich gedachten Excentricität in die Untersuchung hineingezogen ist.

§ 25. Integration des homogenen zweifachen Störungsgliedes.

Es handelt sich jetzt um die Integration der beiden Störungsglieder

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos(mv - \alpha t)\,, \qquad \left(\frac{r}{p}\right)^{n}\sin(mv - \alpha t)\,,$$

in welche die oben genannten allgemeinen Störungsglieder übergehen, wenn $e_{,} = 0$ angenommen wird; und es sollen zunächst wieder die homogenen Glieder betrachtet werden, welche dem Falle $m = n$ entsprechen. Zum

Behufe der Integration vertauscht man in der Gleichung 2. des § 20 den Winkel $m v$ gegen $u = m v - \alpha t$. Auf der rechten Seite kommen dann zu den schon vorhandenen noch einige andere, mit α multiplicirte Glieder hinzu. Es entsteht die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos u\right)' = -\frac{\alpha e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \sin u$$
$$+ \left(1 - e^2 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos(u - v).$$

Man sieht, dass dieselbe wegen des nen hinzugekommenen Gliedes, welches nicht gleichartig ist mit den übrigen, eine nicht eben so einfache Verwendung hat wie die Gleichung 2., deren Verallgemeinerung sie ist. Man kann aber das neu hinzugekommene Glied mit Hilfe von weiteren Derivirten auf andere Glieder zurückführen, welche, wenn auch nicht gleichartig mit den in die zweite Zeile aufgenommenen, doch hinreichend kleine Coefficienten haben, so dass sie für's Erste vernachlässigt werden dürfen.

Ich schreibe die Derivirte:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin u\right) = \left(\frac{r}{p}\right)^n \left(m - \alpha\left(\frac{r}{p}\right)^2\right) \cos u + (n+2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e \sin v \sin u,$$

worin, für den Fall $m = n$ nur das erste Glied homogen, und mit einem Gliede der Gleichnng 2. gleichartig ist. Das dritte Glied zeigt sich gleichartig mit dem dort neu hinzugekommenen. Das zweite Glied aber kann leicht durch andere Glieder ersetzt werden, welche den Faktor $\alpha e \cos v \cos u$ haben. Wegen $m = n$ findet man:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin u\right)' = (n - \alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u + \alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\left(\frac{p}{r} + 1\right) e \cos v \cos u + (n+2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e \sin s \sin u.$$

Ferner schreibe ich die Derivirte:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^n \left(m\left(\frac{p}{r}\right)^2 - \alpha\right) \cos u + n\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \sin r \sin u,$$

welche sich, nachdem man wieder $m = n$ gesetzt hat, so umwandeln lässt, dass ausser den homogenen Gliedern der Gleichung 2. nur ein weiteres gleichfalls mit $e \cos v \cos u$ multiplicirtes Glied vorkommt. Dieselbe geht über in:

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u\right)' = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u + \left(\frac{r}{p}\right)^n e \cos v \cos u + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos(u - v).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem unbestimmten Coefficienten $h\alpha$, und addirt sie zu der obigen Gleichung, so entsteht:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin u + \frac{h\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u\right)' = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)(n + h\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u + h\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos(u - v)$$
$$+ \alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\left(h\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \frac{p}{r} + 1\right) e \cos v \cos u + (n+2)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e \sin v \sin u.$$

Ich mache nun, um das Vorliegende vortheilhafter zu schreiben, von der identischen Gleichung Gebrauch:

$$o = \cos(u - v) - \cos v \cos u - \sin v \sin u.$$

Nachdem dieselbe mit $k\alpha e\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}$ multiplicirt worden ist, addire ich sie zu dem Vorliegenden. Indem ich gleichzeitig $h=1$ und $k=3$ setze, erhält der Coefficient von $\cos v \cos u$ den Faktor αe^3. Es entsteht:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin u+\frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\sin u\right)'=\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)(n+\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos u+\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}e\cos(u-v)$$
$$+3\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}e\cos(u-v)+\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}e^3\cos^3 v\cos u+(n+2-3\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}e\sin v\sin u.$$

Zu diesen beiden füge ich noch eine dritte Derivirte hinzu. Man findet:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin(u-v)\right)'=\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\left((m-1)\left(\frac{p}{r}\right)^2-\alpha\right)\cos(u-v)+(n+1)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}e\sin v\sin(u-v).$$

Mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$e\sin v\sin(u-v)=\left(\frac{p}{r}-1\right)\cos(u-v)-e\cos u$$

lässt sich die vorstehende Gleichung, nachdem man wieder $m=n$ gesetzt hat, auch schreiben:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin(u-v)\right)'=\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\left(2n\left(\frac{p}{r}\right)^2-(n+1)\frac{p}{r}-\alpha\right)\cos(u-v)-(n+1)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}e\cos u.$$

Ich multiplicire dies mit dem unbestimmten Coefficienten $2\beta e$, um es zu der obigen Gleichung zu addiren. Es entsteht:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin u+\frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\sin u+2\beta\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}e\sin(u-v)\right)'$$
$$=\left(\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)(n+\alpha)-2(n+1)\beta e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos u+(4n\beta+\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}e\cos(u-v)$$
$$+\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\left(-2(n+1)\beta\frac{p}{r}+(3-2\beta)\alpha\right)e\cos(u-v)+\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}e^3\cos^3 v\cos u$$
$$+(n+2-3\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}e\sin v\sin u.$$

Die zweite Zeile enthält die homogenen Glieder der Reductionsgleichung 2. Damit alle Glieder der dritten Zeile den Faktor αe^3 erhalten, schreibe ich das erste Glied dieser Zeile in der folgenden Form:

$$-(3-2\beta)\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}e\cos(u-v)+\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\left((3-2\beta)\alpha\left(\frac{p}{r}\right)^2-2(n+1)\beta\frac{p}{r}+(3-2\beta)\alpha\right)e\cos(u-v).$$

Der erste Theil ist ein homogenes Glied, der andere Theil enthält den Faktor αe^3 wenn man, um β zu bestimmen,

$$(n+1)\beta=(3-2\beta)\alpha, \qquad \text{oder } \beta=\frac{3\alpha}{n+1+2\alpha}$$

setzt. Die obige Gleichung geht nun über in:

12. $$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin u + \frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\sin u + 2\beta\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\sin(u-v)\right)'$$
$$= \left(\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)(n+\alpha) - 2(n+1)\beta e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos u + \left((3n-1)\beta+\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(u-v)$$
$$+ (n+1)\beta\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e^2\cos^2 v\cos(u-v) + \alpha\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} e^2\cos^2 v\cos u + (n+2-3\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\sin v\sin u,$$

worin in der That alle nicht homogenen Glieder, das mit $e\sin v\sin u$ multiplicirte ausgenommen, den Faktor αe^2 haben.

Diese Gleichung soll nun dazu dienen, das zuletzt erwähnte Glied aus der oben aus 2. hergeleiteten Reductionsgleichung zu eliminiren. Man setze abkürzend:

$$\gamma = \frac{\alpha}{n+2-3\alpha},$$

und multiplicire die Gleichung 12. mit $\frac{\gamma}{n+1}$, um sie alsdann zu jener andern Gleichung zu addiren. Man findet die Reductionsgleichnng:

$$\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{\gamma\alpha}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\sin u - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin v\cos u\right)' + \frac{\gamma}{n+1}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin u + 2\beta\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\sin(u-v)\right)'$$
$$= \left(\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma) - (1+2\gamma\beta)e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\cos u + \frac{2n+1+(3n-1)\gamma\beta+\gamma\alpha}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(u-v)$$
$$+ \gamma\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} e^2\cos^2 v\left(\beta\frac{p}{r}\cos(u-v) + \frac{\alpha}{n+1}\cos v\cos u\right),$$

mit deren Hilfe man das homogene zweifache Störungsglied integriren kann.

Die Gleichung erfährt eine nicht unwesentliche Vereinfachung, wenn die neu hinzugekommene Derivirte $\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin u\right)'$ in solcher Weise umgewandelt wird, dass alle derivirten Glieder, mit Ausnahme eines einzigen, den Faktor e erhalten. Man benutze zu diesem Zwecke die identische Gleichung:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2 = 1 - 2\frac{r}{p}e\cos v + \left(\frac{r}{p}\right)^2 e^2\cos^2 v.$$

Die linke Seite der Gleichung wird mit Rücksicht auf den obigen Werth γ übergeführt in:

$$\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)\left(\frac{r}{p}\right)^{n}\sin u - \frac{1+2\gamma}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\sin v\cos u\right)'$$
$$- \frac{\gamma}{n+1}\left(2(1-\beta)\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\sin(u-v) - \left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} e^2\cos^2 v\sin u\right)'.$$

Da nun die beiden einzigen nicht mit e multiplicirten Glieder der Reductionsgleichung den gemeinsamen Faktor $\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)$ haben, so empfiehlt es sich, die Gleichung durch diesen Factor zu theilen. Die Coefficienten der übrigen Glieder erfahren dadurch bemerkenswerthe Umwandlungen. Was zunächst die linke Seite der Gleichung betrifft, so findet man:

$$\frac{\gamma}{(n+1-\alpha)(1+2\gamma)} = \frac{\alpha}{(n+1-\alpha)(n+2-\alpha)}, \qquad \frac{\gamma(1-\beta)}{(n+1-\alpha)(1+2\gamma)} = \frac{1}{3}\frac{\beta}{n+2-\alpha}.$$

Der vorgeschlagenen Division zufolge geht hiernach die linke Seite über in:

$$\left(\frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u - \frac{e}{n+1-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos u - \frac{2}{3}\frac{\beta e}{n+2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u-v) + \frac{\alpha e^2 \cos^2 v}{(n+1-\alpha)(n+2-\alpha)}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin u\right)'.$$

Die rechte Seite der Gleichung betreffend findet man:

$$1 + 2\gamma\beta = \frac{n+2-\alpha-2\alpha(1-\beta)}{n+2-3\alpha}.$$

Daraus folgt, dass der Coefficient von e^2 in dem ersten Gliede

$$\frac{1+2\gamma\beta}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)} = \frac{n+2-\alpha-2\alpha(1-\beta)}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(n+2-\alpha)} = \frac{n+1}{n+1-\alpha} - \frac{2}{3}\frac{(n+1)\beta}{n+2-\alpha}$$

ist. Dies gibt Veranlassung zu den weiteren Abkürzungen:

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n+1}} = \delta, \qquad \frac{2}{3}\frac{(n+1)\beta}{n+2-\alpha} = \frac{2\alpha}{\left(1+\frac{2\alpha}{n+1}\right)(n+2-\alpha)} = \varepsilon.$$

Anstatt der vorigen Gleichung hat man die einfachere:

$$\frac{1+2\gamma\beta}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)} = \delta - \varepsilon.$$

Den Coefficienten des zweiten Gliedes auf der rechten Seite der Reductionsgleichung betreffend schreibe man zunächst:

$$2n+1+(3n-1)\gamma\beta+\gamma\alpha = \frac{n+3}{2} + \gamma\alpha + \frac{3n-1}{2}(1+2\gamma\beta).$$

Man findet alsdann:

$$\frac{n+3+2\gamma\alpha}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)} = \frac{(n+3)(n+2-3\alpha)+2\alpha^2}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(n+2-\alpha)} = \frac{(n+3-4\alpha)(n+2-\alpha)+2\alpha(n+1-\alpha)}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(n+2-\alpha)}.$$

Mit Rücksicht auf die obigen Abkürzungen erhält man:

$$\frac{n+3+2\gamma\alpha}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)} = (n+3-4\alpha)\delta + (n+1+2\alpha)\varepsilon.$$

Es folgt weiter, dass in dem Coefficienten des zweiten Gliedes

$$\frac{2n+1+(3n-1)\gamma\beta+\gamma\alpha}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)} = (n+3-4\alpha)\frac{\delta}{2} + (n+1+2\alpha)\frac{\varepsilon}{2} + (3n-1)\frac{\delta-\varepsilon}{2} = (2n+1-2\alpha)\delta - (n-1-\alpha)\varepsilon$$

zu setzen ist. Die Reductionsgleichung zeigt sich alsdann in der Form:

$$\left(\frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u - \frac{\delta e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos u - \frac{\varepsilon e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u-v) + \frac{\delta}{n+1}\,\frac{\alpha e^2}{n+2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \cos^2 v \sin u\right)'$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha}{n} - (\delta - \varepsilon) e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u + \frac{(2n+1-2\alpha)\delta - (n-1-\alpha)\varepsilon}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos(u-v)$$

$$+ \frac{\delta \alpha e^3 \cos^2 v}{n+2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\left(\beta \frac{p}{r}\cos(u-v) + \frac{\alpha}{n+1}\cos v \cos u\right).$$

Man führe nun abkürzend die Funktion $s(n, \alpha)$ ein, welche durch die folgendo Gleichung bestimmt ist:

$$s(n, \alpha) = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u - \frac{\delta e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos u - \frac{\varepsilon e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u-v) + \frac{\delta}{n+1}\,\frac{\alpha e^2}{n+2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \cos^2 v \sin u.$$

Die Reductionsgleichung erhält die einfachere Form:

13. $$s(n, \alpha)' - R = \left(1 - \frac{\alpha}{n} - (\delta - \varepsilon) e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u + \frac{(2n+1-2\alpha)\delta - (n-1-\alpha)\varepsilon}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e \cos(u-v),$$

welche für $\alpha = 0$, weil dann $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$, $R = 0$ ist, in 2. übergehend, ebenso wie diese zur Integration dos homogenen Störungsgliedes verwendet werden kann. Das Restglied schreibt sich

$$R = \frac{\delta \alpha e^3 \cos^2 v}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\left(\frac{3\varepsilon}{2}\,\frac{p}{r}\cos(u-v) + \frac{\alpha}{n+2-\alpha}\cos v \cos u\right).$$

Wenn in der Theorie des Mondes der Fehler der berechneten Störungen den Betrag von 0,1 Bogensecunde nicht übersteigen soll, damit die genaue Vergleichung der berechneten Coordinatenwerthe mit den beobachteten ausführbar werde, so dürfte man in der vorliegenden Reductionsgleichung, da hier nahezu $e = \frac{1}{18}$ und $\lambda = \frac{1}{13}$ ist, das Restglied R, welches den Factor $\alpha^2 e^3$ hat, in der Regel ganz vernachlässigen. Jedenfalls aber dürfte dies geschehen, nachdem man noch diejenigen Glieder von R berücksichtigt hat, welche Funktion von v, allein sind, und deren Integrale in Folge dessen einen kleinen Nenner erhalten.

Durch diese Reduction wird der Exponent n des homogenen Störungsgliedes um die Einheit kleiner gemacht. Bei der wiederholten Anwendung der Reductionsgleichung würde man mit Rücksicht auf das abnehmendo n die Grössen δ und ε, um Verwechslungen zu vermeiden, durch δ_n und ε_n bezeichnen. Die n malige Reduction führt schliesslich zur Integration eines mit $\cos \alpha t$ multiplicirten, im Uebrigen aber beständigen Gliedes.

§ 26. Ueber das Integral des homogenen zweifachen Störungsgliedes.

Das vollständige Integral des homogenen Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u$ onthält n Funktionen von der Form $s(n, \alpha)$, in welchen der Buchstabe n die absteigenden Zahlen durchläuft. Die Funktion $s(n, \alpha)$ unterscheidet sich von der oben angewendeten Funktion $s(n)$ dadurch, dass zu den beiden Bestandtheilen der letzteren noch die nicht homogenen Glieder der zweiten Stufe $\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin u$ und $\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u-v)$

hinzukommen. Die veränderlichen Bestandtheile in den n Funktionen $s(n, \alpha)$ sind hiernach nicht alle von verschiedener Art. Man hat schon oben gesehen, dass sich jedes nicht homogene Glied der zweiten Stufe durch zwei Ausdrücke ersetzen lässt, welche mit den veränderlichen Bestandtheilen der Funktion $s(n)$ übereinstimmen. Es ist:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u - v) = \left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u + v) - 2\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos u$$

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin u \qquad = \left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin(u + 2v) - 2\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin v \cos(u + v)\,.$$

Es folgt daraus, dass die beiden neu hinzugefügten Bestandtheile in irgend einem Gliede $s(n, \alpha)$ gleichartig sind mit gewissen Bestandtheilen vorausgehender Glieder $s(n, \alpha)$.

Es hat sich oben bei der Aufstellung der Reductionsgleichung 13. gezeigt, dass die Funktion $s(n, \alpha)$ zweckmässig in andere Bestandtheile zerlegt wird, als man ursprünglich angenommen hatte. In der so geänderten Form der Funktion $s(n, \alpha)$ erhalten die beiden zu der Funktion $s(n)$ neu hinzugekommenen Bestandtheile beziehungsweise die Factoren e und e^2. Ich möchte es bei dieser Gelegenheit nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass diese weiter hinzugefügten Bestandtheile zu einem Restglied R geführt haben, welches den Factor α^2 hat, wiewohl die Bestandtheile selbst nur mit α multiplicirt sind. Darauf gründet sich ein Vorzug der obigen Funktion $s(n, \alpha)$ anderen etwa vorzuschlagenden ähnlichen Funktionen gegenüber.

Unter gewissen Bedingungen erhält das Integral des Störungsgliedes einen Werth, welcher beträchtlich grösser ist, als der des Störungsgliedes selbst. Dies tritt immer dann ein, wenn durch die Integration ein kleiner Nenner entsteht. Aus der Gleichung 13. ersieht man, dass die Factoren des Ausdrucks $\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+2}\right)$ in dem Integral als Nenner vorkommen. Man hat also darauf zu achten, ob etwa einer von diesen Factoren einen kleinen Bruchwerth ausdrücke. Der Nenner $1 - \frac{\alpha}{n}$ ist dabei vorzugsweise zu beachten; weniger von Bedeutung sind die beiden andern Nenner, weil dieselben nur in den mit e multiplicirten Gliedern des Integrals vorkommen. Ausser dem obigen kommt auch der Ausdruck $n + 1 + 2\alpha$ in Betracht, welcher in seiner Eigenschaft als Nenner gleichzeitig mit der Grösse ε in die Funktion $s(n, \alpha)$ eingeführt worden ist. Wenn einer von diesen vier Nennern so klein ist, dass er gleich Null gesetzt werden dürfte, so würde dies darauf hinweisen, dass die in dem vorigen Paragraphen vorausgesetzte Form des Integrals unzulässig ist. In der Theorie des Mondes kommt indessen der Fall nicht vor, dass einer von diesen Nennern verschwindet.

Im § 24 ist gezeigt worden, wie man die Correction wegen der elliptischen Form der äussern Bahn anzubringen habe. Es gibt übrigens einen Bestandtheil des Integrals, welcher verlangt, dass man von diesem Verfahren abweiche. Man hat gesehen, dass die durch die Gleichung 13. vorgeschriebene Reduction des homogenen Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u$ schliesslich zu dem Gliede $\cos \alpha t$ führt. In gleicher Weise führt die Reduction des homogenen Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u$ zu dem Gliede $\sin \alpha t$. Die Glieder $\cos \alpha t$ und $\sin \alpha t$ sind es, auf welche das oben erwähnte Verfahren keine Anwendung finden soll. Wenn man von vornherein dem Einflusse der elliptischen Form der äusseren Bahn Rechnung trägt, so erhält man an der Stelle jener beiden Glieder zwei Funktionen von v, allein. Als solche wird man dieselben, ohne irgend eine Vernachlässigung vorausgeschickt zu haben, vollständig integriren.

Zu diesem Verfahren ist neben dem Umstande, dass hier die vollständige Integration überhaupt keinerlei Schwierigkeit mehr bietet, noch ein anderer Anlass gegeben. Da nämlich die bezeichneten Glieder als Funktion von $v_,$ allein durch die Integration den kleinen Nenner λ erhalten, so wird das nach der Vorschrift des § 24 gebildete Integral eine geringere Convergenz haben als dort vorgesehen ist. Man wird desshalb das Integral vortheilhafter in anderer Weise darstellen. Es handelt sich hier um die Integration der Glieder:

$$\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^{n_,}\cos m_, v_, \qquad\qquad \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^{n_,}\sin m_, v_,\,,$$

worin $n_,$ eine ganze Zahl, und > 2 ist. Das vollständige Integral lässt sich durch eine begrenzte Anzahl Glieder darstellen. Im § 23 sind zwei verschiedene Wege angegeben worden, welche dazu führen.

Man weiss, dass die Convergenz der Reihenentwicklungen vorzugweise durch diejenigen Glieder beeinträchtigt wird, welche durch die Integration einen kleinen Nenner erhalten, und deren Integrale in Folge dessen oftmals einen sehr viel grösseren Zahlenwerth darstellen als die Störungsglieder selbst. Schon vorhin hat man Veranlassung gehabt, auf derartige Störungsglieder hinzuweisen. Ebendahin gehören auch die soeben besprochenen Störungsglieder, in welchen $m = 0$ vorausgesetzt ist, weil dieselben durch die Integration den kleinen Nenner λ erhalten. Ein besonderes Augenmerk aber muss man auf dieselben richten, wenn darin der Coefficient $m_,$ einen kleinen Bruchwerth darstellt, weil in diesem Falle der Nenner $m_, \lambda$ in Betracht kommt. Diejenigen Glieder des Integrals, welche in der Theorie des Mondes der Convergenz der Reihen die im Vorstehenden bezeichnete Schwierigkeit bereiten, entspringen immer nur aus den zuletzt erwähnten Funktionen von $v_,$ allein.

§ 27. Reduction nicht homogener Störungsglieder auf homogene.

Es ist im § 25 gezeigt worden, wie man die homogenen Störungsglieder:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos(m\,v - \alpha\,t) \qquad\qquad \left(\frac{r}{p}\right)^n\sin(m\,v - \alpha\,t)$$

zu integriren hat. Ich schreite nun zur Integration der nicht homogenen zweifachen Störungsglieder. Sehr leicht bewerkstelligt sich die Reduction solcher Glieder auf homogene, wenn der Exponent n um die Einheit zu klein ist. Man hat schon oben die Derivirte aufgezeichnet:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n\sin u\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^n\left(m\left(\frac{p}{r}\right)^2 - \alpha\right)\cos u + n\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\sin v\sin u.$$

Indem man dieselbe ebenso, wie im § 21 für $\alpha = 0$ geschehen ist, umwandelt, hat man die Gleichung:

$$\text{14.}\qquad \left(\left(\frac{r}{p}\right)^n\sin u\right)' = (m - n)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u + n\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\left(\cos u + e\cos(u - v)\right) - \alpha\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos u.$$

Setzt man hier $m = n$, also $u = n\,v - \alpha\,t$, so behält man die einfachere:

$$\text{15.}\qquad \frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n\sin u\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos u + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(u - v) - \frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos u,$$

mit deren Hilfe das Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos u$ auf zwei homogene Glieder zurückgeführt wird.

Ebenso leicht kann man das nicht homogene Glied der ungeraden Stufe anf nicht homogene Glieder gerader Stufe zurückführen. In der Gleichung 14. vertausche man desshalb m gegen $-m$, und zugleich α gegen $-\alpha$. Vertauscht man noch u gegen $-u$, damit $u = mv - \alpha t$ bleibe, so erhält man die neue Gleichung:

$$16. \qquad -\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos u + \left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(u+v) - \frac{n+m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u + \frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u,$$

mit deren Hilfe irgend ein nicht homogenes Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\cos u$ anf zwei andere Glieder zurückgeführt werden kann, deren Stufe um die Einheit kleiner ist, und auf ein drittes, dessen Stufe um die Einheit grösser ist.

Um nun anch die nicht homogenen Störungsglieder gerader Stufe auf homogene Glieder zurückzuführen, komme ich abermals auf die Reductionsgleichung 1. zurück. Vertauscht man darin mr gegen $u = mv - \alpha t$, so geht sie über in:

$$\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin v\cos u\right)' = -\frac{\alpha e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin v\sin u$$
$$+\left(1-e^2-\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha}{n}\,\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos u + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(n-v) - \frac{n+1-m}{n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u.$$

Man addire hierzu ebenso, wie im § 25 zu der aus der 2. hergeleiteten Reductionsgleichung, die Derivirte:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin n + \frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin n + 2\beta\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\sin(u-v)\right)'.$$

Man findet leicht, dass auf der rechten Seite der Gleichung 12., durch welche sich diese Derivirte für den Fall $m = n$ bestimmt, da nun nicht mehr $m = n$ ist, noch die folgenden Glieder hinzukommen:

$$(m-n)\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos u + \frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u + 2\beta\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(u-v)\right),$$

und bemerke, dass dieselben gleichartig sind mit den Gliedern der zweiten Zeile in der obigen Reductionsgleichung. Indem man die in solcher Weise verallgemeinerte Gleichung 12. mit $\frac{\gamma}{n+1}$ multiplicirt, und alsdann zu der obigen Reductionsgleichung addirt, führt man die letztere über:

$$\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{\gamma\alpha}{n+1}+\frac{n-m}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\sin n - \frac{e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin v\cos n\right)' + \frac{\gamma}{n+1}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\sin n + 2\beta\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} e\sin(u-v)\right)'$$
$$= \left(\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma) - \left(\frac{\alpha}{n}+\gamma\right)\frac{n-m}{n+1} - (1+2\gamma\beta)e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos n$$
$$+\frac{2n+1+(n+2m-1)\gamma\beta+\gamma\alpha}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(u-v) - \frac{n+1-m+\gamma\alpha}{n+1}\,\frac{n-m}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u$$
$$+\gamma\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} e^2\cos^2 v\left(\beta\,\frac{p}{r}\cos(n-v) + \frac{\alpha}{n+1}\cos v\cos u\right).$$

Auf der linken Seite der Gleichung bringe man ebenso, wie oben für den Fall $m = n$ geschehen ist, an die Stelle von $\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\cos u$ andere Glieder, welche mit e multiplicirt sind, um alsdann wieder

die ganze Gleichung durch $\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)$ zu theilen. Ferner führe man noch die Abkürzung ein:

$$\frac{n-m}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)}=\frac{(n-m)(n+2-3\alpha)}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(n+2-\alpha)}=\zeta,$$

von welcher auf der linken Seite der Gleichung, und auch auf der rechten Seite in dem ersten und dem dritten Gliede Gebrauch gemacht werden soll. In dem Coefficienten des zweiten Gliedes der rechten Seite schreibe man, der im § 25 vorgenommenen Umwandlung entsprechend:

$$2n+1+(n+2m-1)\gamma\beta+\gamma\alpha=n-m+\frac{n+3}{2}+\gamma\alpha+\frac{n+2m-1}{2}(1+2\gamma\beta).$$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{2n+1+(n+2m-1)\gamma\beta+\gamma\alpha}{\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2\gamma)}=\zeta+(n+3-4\alpha)\frac{\delta}{2}+(n+1+2\alpha)\frac{\varepsilon}{2}+(n+2m-1)\frac{\delta-\varepsilon}{2}$$
$$=\zeta+(n+1+m-2\alpha)\delta-(m-1-\alpha)\varepsilon,$$

und die Reductionsgleichung nimmt die folgende Gestalt an:

$$\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{\zeta}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\sin u-\frac{\delta e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin v\cos u-\frac{\varepsilon e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin(u-v)+\frac{\delta}{n+1}\,\frac{\alpha e^2}{n+2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\cos^2 v\sin u\right)'$$
$$=\left(1-\frac{\alpha}{n}-\left(\frac{\alpha}{n}+\gamma\right)\frac{\zeta}{n+1}-(\delta-\varepsilon)e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos n+\frac{\zeta+(n+1+m-2\alpha)\delta-(m-1-\alpha)\varepsilon}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}e\cos(n-v)$$
$$-\frac{n+1-m+\gamma\alpha}{n+1}\,\frac{\zeta}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u+\frac{\delta\alpha e^2\cos^2 v}{n+2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\left(\beta\,\frac{p}{r}\cos(u-v)+\frac{\alpha}{n+1}\cos v\cos u\right).$$

Man bestimme nun eine Funktion $s\,(n, m, \alpha)$ durch die Gleichung:

$$s\,(n,m,\alpha)$$
$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{\zeta}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\sin u-\frac{\delta e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin v\cos u-\frac{\varepsilon e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1}\sin(n-v)+\frac{\delta}{n+1}\,\frac{\alpha e^2}{n+2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\cos^2 v\sin u;$$

und die Reductionsgleichung zeigt sich in der einfacheren Form:

17. $$s(n,m,\alpha)'-R=\left(1-\frac{\alpha}{n}-\left(\frac{\alpha}{n}+\gamma\right)\frac{\zeta}{n+1}-(\delta-\varepsilon)e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n\cos u$$
$$+\frac{\zeta+(n+1+m-2\alpha)\delta-(m-1-\alpha)\varepsilon}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}e\cos(n-v)-\frac{n+1-m+\gamma\alpha}{n+1}\,\frac{\zeta}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u.$$

Das Restglied ist:

$$R=\frac{\delta\alpha e^2\cos^2 v}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\left(\frac{3\varepsilon}{2}\,\frac{p}{r}\cos(u-v)+\frac{\alpha}{n+2-\alpha}\cos v\cos u\right).$$

Die Gleichung 17., welche für $m=n$ in 13., und für $\alpha=0$ in 1. übergeht, dient zur Reduction eines nicht homogenen Störungsgliedes gerader Stufe. Nebenbei aber bedarf es zu diesem Zwecke noch einer anderen Gleichung, welche aus der vorliegenden hergeleitet werden kann, indem man m gegen $-m$, α gegen $-\alpha$, und gleichzeitig u gegen $-u$ vertauscht. Gebraucht man dabei die Abkürzungen:

$$\delta = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n+1}} \qquad \varepsilon = \frac{-2\alpha}{\left(1 - \frac{2\alpha}{n+1}\right)(n+2+\alpha)}$$

$$\gamma = \frac{-\alpha}{n+2+3\alpha} \qquad \zeta = \frac{(n+m)(n+2+3\alpha)}{\left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right)(n+2+\alpha)},$$

so hat man, um die neue Reductionsgleichung zu erhalten, ausser den schon erwähnten Vertauschungen keine sonstige Aenderung in 17. anzubringen. Die neue Reductionsgleichung ist:

$$18.\ s(n, -m, -\alpha)' - R = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \left(\frac{\alpha}{n} - \gamma\right)\frac{\zeta}{n+1} - (\delta - \varepsilon)\,e^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u$$
$$+ \frac{\zeta + (n+1-m+2\alpha)\,\delta + (m+1-\alpha)\,\varepsilon}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} e\cos(u+v) - \frac{n+1+m-\gamma\alpha}{n+1}\,\frac{\zeta}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2}\cos u,$$

wo ebenso wie in den übrigen Reductionsgleichungen $u = mv - \alpha t$ ist. Zur Bestimmung von $s(n, -m, -\alpha)$ hat man die Gleichung:

$$-s(n, -m, -\alpha)$$
$$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\zeta}{n+1}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u + \frac{\delta e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin v \cos u - \frac{\varepsilon e}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u+v) - \frac{\delta}{n+1}\,\frac{\alpha e^3}{n+2+\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+3} \cos^2 v \sin u;$$

und das Restglied schreibt sich:

$$R = \frac{-\delta\,\alpha\,e^3 \cos^2 v}{n+1}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+2}\left(\frac{3\,\varepsilon}{2}\,\frac{p}{r}\cos(u+v) - \frac{\alpha}{n+2+\alpha}\cos v \cos u\right).$$

Mittels der Gleichung 18., welche für $\alpha = 0$ in 6. übergeht, führt man ein nicht homogenes Glied der i^{ten} Stufe $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u$ auf zwei andere Glieder der $i-2^{\text{ten}}$ Stufe zurück. Das eine der beiden neuen Glieder, nämlich das Glied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \cos(u+v)$, lässt sich alsdann durch eines der $2i-4^{\text{ten}}$ Stufe ersetzen. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichung 17., nachdem man zu diesem Zwecke in derselben m gegen $m+1$ und n gegen $n-1$ vertauscht hat. Für den Fall $i = 2$ fällt das der $2i-4^{\text{ten}}$ Stufe entsprechende Glied weg, weil dann in jener Gleichung 17. der Coefficient ζ verschwindet und man behält ein homogenes Glied. In jedem andern Falle führt man die beiden neuen Glieder, indem man von den Gleichungen 17. und 18. zum zweitenmale Gebrauch macht, auf zwei andere ähnliche Gleichungen zurück, deren Stufe beziehungsweise um zwei Einheiten niedriger ist als vorher. Durch die wiederholte Anwendung der Gleichungen 17. und 18. gelangt man schliesslich immer wieder zu einem homogenen Gliede; und es werden auf diesem Wege im Ganzen $2i$ Funktionen $s(n, m, \alpha)$ in das theilweise Integral eingeführt.

Bei dem wiederholten Gebrauche der Gleichungen 17. und 18. wird man die Buchstaben $\gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$ zweckmässig durch $\gamma_n\ \delta_n\ \varepsilon_n\ \zeta_n$ ersetzen. Die Grösse ζ ist allerdings Funktion der beiden Zahlen m und n. Die vorgeschlagene Unterscheidung der Grössen wird aber doch für alle Fälle ausreichen, weil der Buchstabe m, wiewohl derselbe zwei verschiedene Zahlenwerthe hat, in jeder der beiden Reductionsgleichungen 17. und 18. stets den nämlichen Zahlenwerth beibehält, während die Zahl n immer kleiner wird. Die Zahl n betreffend ist weiter zu bemerken, dass dieselbe in 17. jedesmal eine gerade ist, und in 18. eine ungerade, oder umgekehrt. In Folge dessen sind auch die Ordnungszahlen der Buchstaben $\gamma_n\ \delta_n\ \varepsilon_n\ \zeta_n$ in der einen Gleichung jedesmal gerade, in der andern ungerade Zahlen. Irgend einer der Buchstaben $\gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$, mit zwei aufeinanderfolgenden Ordnungszahlen behaftet, bezeichnet zwei Grössen,

welche sich nicht allein durch den Zahlenwerth von n, sondern auch durch den von m, und durch das Vorzeichen von α unterscheiden.

Im Bisherigen habe ich die Reduction des nicht homogenen Störungsgliedes $\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos(m\,v - \alpha\,t)$ für den Fall, dass $n = m - 1$, oder auch $n > m - 1$ sei, auf ein homogenes Störungsglied ausgeführt. Wenn $n < m - 1$ angenommen wird, so ist eine derartige Reduction auf ein homogenes Glied nicht möglich. Man kann übrigens, wenn neben der Annahme $n < m - 1$ gleichzeitig $n > -2$ angenommen ist, das vorliegende Störungsglied mit Hilfe der Gleichungen 17. und 18. auf die einfachere Form $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos u$ zurückführen, wo abkürzend $u = n\,v - \alpha\,t$ gesetzt ist, vgl. § 23.

Das Störungsglied $\left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos u$ lässt sich hier ebenso leicht, wie oben für den Fall $\alpha = 0$, auf eine unbegrenzte Reihe homogener Störungsglieder zurückführen. Man schreibt in dieser Absicht die Derivirte:

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u\right)' = \left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos u - \frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\left(\cos(u+v) - \cos(u-v)\right) - \frac{\alpha}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u\,.$$

An die Stelle von n setze man nach und nach $n+1$, $n+2\ldots$, und multiplicire diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, \frac{e}{2}, \left(\frac{e}{2}\right)^2 \ldots$. Durch deren Integration erhält man alsdann die Reductionsgleichung:

$$19.\quad \left(\frac{r}{p}\right)^{n-2} \cos u = \left(\frac{1}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^n \sin u + \frac{1}{n+1}\,\frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \sin(u+v) + \frac{1}{n+2}\left(\frac{e}{2}\right)^2 \left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \sin(u+2v) + \ldots\right)'$$
$$- \frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} \cos(u-v) + \left(\frac{\alpha}{n} - \left(\frac{e}{2}\right)^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos u + \left(\frac{\alpha}{n+1} - \left(\frac{e}{2}\right)^2\right)\frac{e}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^{n+1} \cos(u+v) + \ldots$$

Die Integration des hier besprochenen Störungsgliedes führt demnach auf eine unendliche Reihe Glieder von der Form $s\,(n, \alpha)$.

§ 28. Weiteres über die beiden Näherungsmethoden zur Integration der Störungsgleichungen.

Die im Bisherigen aufgestellten Regeln zur Integration eines Störungsgliedes geben immer noch nicht den vollständigen Werth des Integrals, denn man ist von der Voraussetzung ausgegangen, dass die gestörten Elemente, von deren Einflusse sich die Störungsglieder nicht befreien lassen, beständig seien. Es soll nun auch auf diesen Umstand Rücksicht genommen werden.

Die gestörten Elemente sind $p\,p_{,}$ $\omega\,\omega_{,}$ $i\,i_{,}$ und ϑ, und aus der Art ihres Vorkommens folgt, dass alle Störungsglieder in den allgemeinen Ausdrücken:

$$\varrho\left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}} \cos(u + \xi)\,, \qquad \varrho\left(\frac{r}{p}\right)^n \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^{n_{,}} \sin(u + \xi)$$

enthalten sind, wo $u = m\,v - m_{,}\,v_{,}$ ist, ϱ und ξ Funktionen der veränderlichen Elemente sind. Will man den bisherigen Integralen wegen der Veränderlichkeit von ϱ und ξ eine Correktion beifügen, so

stehen bekanntlich zwei verschiedene Methoden zur Verfügung, welche dazu führen, vgl. § 16. Da es aber nicht gleichgiltig ist, welche von den beiden Methoden eingeschlagen werde, so soll hier ausgeführt werden, was schon in § 32 Pbl. III versucht worden ist, die bei dieser Wahl maassgebenden Umstände zu erörtern.

Ich betrachte zunächst den Fall, dass das Störungsglied Function von v und das Element, welches variirt werden soll, Function von v_1 allein sei. Es ist dies derjenige Fall, welcher schon oben im § 24 bei der Bestimmung der Correction wegen der elliptischen Form der äusseren Bahn in Betracht genommen ist, und wo man der Methode der variirten Näherung den Vorzug hat einräumen müssen. Die Derivirte des Elementes hat hier den kleinen Factor λ, und in Folge dessen ist auch die Derivirte der Correction mit diesem Factor verbunden, wenn man sich der Methode der variirten Näherung bedient. Wollte man sich in dem hier besprochenen Falle des Verfahrens der successiven Substitution bedienen, so würde die Derivirte der Correction jenen Factor λ nicht erhalten. Wenn auch selbstverständlich die beiden Methoden, wiederholt in Anwendung gebracht, schliesslich zu einem und demselben Resultate führen, so liefert doch die erstere eine weit stärker convergirende Entwicklung des Integrals.

In den §§ 23 und 24, Pbl. III habe ich, die Theorie des Mondes betreffend, erste Näherungen, von i und ϑ aufgestellt, welche sich als Funktion von v_1 allein darstellen. Der in § 25, Pbl. III gemachte Vorschlag, diese Näherungen selbst in die Störungsgleichungen einzuführen, muss auf Grund der vorstehenden Erörterungen hin zurückgenommen werden. Man muss bei der Variation der Elemente i und ϑ, insofern sie Funktion von v_1 allein sind, an der Methode der variirten Näherung festhalten, in allen denjenigen Fällen wenigstens, wo das Störungsglied als Funktion von v vorliegt. Andernfalls, wenn das Störungsglied selbst Funktion von v_1 ist, haben die in Rede stehenden Glieder von i und ϑ immer nur Funktionen von v_1 allein zur Folge, und bedarf es dann zum Behufe der Integration keiner besonderen Regel mehr.

Dem soeben besprochenen Falle stelle ich nun den umgekehrten gegenüber, in welchem das Störungsglied Funktion von v_1 allein ist, und das zu variirende Element eine Funktion von v. Wenn es feststeht, dass in dem ersteren Falle das Verfahren der variirten Näherung förderlicher ist, so hat in diesem Falle unzweifelhaft das andere Verfahren den Vorzug. In Betreff des ersteren Verfahrens bemerke man, dass das Integral des Störungsgliedes den kleinen Nenner λ hat, welcher durch die nachträglich auszuführende Variation nach dem gestörten Elemente nicht beseitigt wird, weil das letztere als Funktion von v vorausgesetzt ist. Wenn man aber das andere Verfahren einschlägt, so erhält die Derivirte der Correction nicht mehr jenen kleinen Nenner λ. Man findet desshalb in dem hier besprochenen Falle die stärker convergirende Entwicklung durch das Verfahren der successiven Substitution.

Einer eingehenden Erörterung bedarf der sehr gewöhnliche Fall, dass nicht allein das Störungsglied Funktion von v sei, sondern auch das Element, welches variirt werden soll, eine solche Funktion darstelle. Mit Rücksicht auf die beiden soeben betrachteten Fälle lässt sich sogleich sagen, dass hier das eine und das andere Verfahren einerlei Convergenz liefere, woraus dann folgen würde, dass hier die Wahl der Methode gleichgiltig sei.

Es kommen aber noch andere Umstände bei der Wahl zwischen den beiden Methoden in Betracht. In dem hier besprochenen Falle, dass das Störungsglied und zugleich das zu variirende Element Funktion von v sei, führt die Vergleichung zwischen dem Störungsgliede und dem Integrale desselben noch zu einer andern merkwürdigen Rücksicht. Es darf angenommen werden, dass die erste Näherung des Integrals in der Regel doch eine verwickeltere Funktion ist als das Störungsglied selbst. Das Einemal differentiire man die erste Näherung, die darin vorkommenden Elemente allein als Funktion der Zeit betrachtend,

um alsdann die Derivirten dieser Elemente einzusetzen. Das Anderemal denke man sich die ersten Näherungen aller Elemente in die Störungsgleichungen selbst eingesetzt. Es scheint kein Grund vorzuliegen zu der Annahme, dass sich der eine Ausdruck einfacher gestalte als der andere. Man dürfte also auch in dieser Rücksicht die Wahl der einzuschlagenden Methode für gleichgiltig halten. Betrachtet man aber insbesondere die Variation der Elemente p und ω, so darf man nicht ausser Acht lassen, dass in der neuen Störungstheorie die Derivirten dieser beiden Elemente nicht unmittelbar gegebene Grössen sind, wie in der vorstehenden Vergleichung vorausgesetzt worden ist. Die Derivirten p' und ω' zeigen sich vielmehr schon in den Gliedern der ersten Ordnung als Funktion der Elemente τ und σ, deren erste Näherungen sofort eingesetzt werden müssen, und gestalten sich in Folge dessen durchaus nicht einfacher als die ersten Näherungen von p und ω selbst. Diese Bemerkung genügt vollkommen, um es über jeden Zweifel zu erheben, dass bei der Variation der Elemente p und ω das Verfahren der successiven Substitution eingeschlagen werden muss.

Schon im § 17 hat man gefunden, dass die Methode der successiven Substitution im Allgemeinen vor der Methode der variirten Näherung den Vorzug habe, so lange nicht ganz besondere Rücksichten zu Gunsten des zuletzt erwähnten Verfahrens vorliegen. In dem ersten der vorhin besprochenen Fälle, wo das Störungsglied als Funktion von v, und das gestörte Element als Funktion von v, allein angenommen ist, kommen in der That solche Rücksichten zur Geltung, und in der Theorie des Mondes berühren dieselben vorzugsweise die Elemente i und ϑ, weil in diesen Elementen die am meisten hervorragenden Glieder Funktion von v, allein sind. In Betreff der Elemente p und ω ist jetzt zu den in den §§ 16 und 17 aufgezeichneten Gründen noch ein weiterer hinzugekommen, welcher für die Methode der successiven Substitution spricht. Wiewohl in der Theorie des Mondes die erste Näherung des Elementes ω ein beträchtliches Glied enthält, die jährliche Gleichung genannt, welches Funktion von v, allein ist, und als solches die Methode der variirten Näherung verlangt, so wird hierdurch in Betreff der übrigen Glieder von ω das Vorrecht der andern Methode selbstverständlich doch nicht in Frage gestellt.

§ 29. Die Störungsglieder mit Rücksicht auf Knoten und Neigung.

Es kann nicht daran gedacht werden, dass es gelingen möchte, die Störungsgleichungen zu integriren, ohne vorher die Störungsfunktion irgendwie einer Reihenentwicklung unterworfen zu haben. Die Störungsfunktion enthält die drei Veränderlichen r $r_,$ und s, welche ihrerseits als Funktion von v und $v_,$ gegeben sind. Durch die Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen von $\frac{r}{r_,}$ gelangt man zu Störungsgliedern, deren Factoren irgend ganzzahlige Potenzen der Grössen r $r_,$ und s sind. Die Aufgabe dieses Abschnittes kann nun im Wesentlichen als gelöst angesehen werden. Ich habe gezeigt, wie man die Störungsglieder integriren kann, ohne vorher die Potenzen von r und $r_,$ nach Potenzen von e und $e_,$ entwickelt zu haben. Im Bisherigen ist angenommen, dass die Potenzen von s in einer Reihe entwickelt seien, deren Glieder nach Potenzen einer trigonometrischen Funktion der Neigung geordnet sind. Aber auch diese Entwicklung ist durchaus nicht ein Erforderniss der Integration. Es soll noch gezeigt werden, wie man auch diese Entwicklung vermeiden kann.

Man hat ursprünglich den Werth:

$$s = \cos u \cos u_, + \cos i \sin u \sin u_,.$$

Nachdem man denselben umgeformt hat in:

$$s = \cos^2\frac{i}{2}\cos(u - u_,) + \sin^2\frac{i}{2}\cos(u + u_,),$$

kann man leicht die Entwickelung einer Potenz von s nach Potenzen von $\text{tg}^2\frac{i}{2}$ herstellen. Anstatt aber auf dieselbe näher einzugehen, kehre ich zu der ursprünglichen Form zurück, und schreibe die beiden Gleichungen:

$$\cos u_, = \varrho\cos(u_, - \psi) \qquad \cos i \sin u_, = \varrho\sin(u_, - \psi).$$

Dies führt alsdann zu dem einfacheren Werthe:

20. $$s = \varrho\cos(u - u_, + \psi).$$

Es ist bekanntlich $u + \vartheta = v + \omega$ und $u_, + \vartheta = v_, + \omega_,$. Daraus folgt:

$$s = \varrho\cos(v - v_, + \omega - \omega_, + \psi).$$

Man sieht, dass die beiden Elemente i und ϑ jetzt nur noch in den Grössen ϱ und ψ vorkommen, welche nun als deren Stellvertreter angesehen werden können. Diese beiden Grössen bestimmen sich leicht als Funktion der genannten Elemente und von $v_,$. Denn es ist:

$$\varrho^2 = \cos^2 u_, + \cos^2 i \sin^2 u_,$$

21. oder $$\varrho^2 = 1 - \sin^2 i \sin^2 u_,.$$

Ferner findet man die beiden Gleichungen:

$$\varrho\cos\psi = \cos^2 u_, + \cos i \sin^2 u_, = \cos^2\frac{i}{2} + \sin^2\frac{i}{2}\cos 2u_,$$

$$\varrho\sin\psi = (1 - \cos i)\cos u_, \sin u_, = \sin^2\frac{i}{2}\sin 2u_,.$$

Aus denselben folgt zur Bestimmung von ψ die einfachere Gleichung

22. $$\text{tg}\,\psi = \frac{\text{tg}^2\frac{i}{2}\sin 2u_,}{1 + \text{tg}^2\frac{i}{2}\cos 2u_,}.$$

In dem Störungsgliede setze man an die Stelle von s den Werth 20. ein, um alsdann die Potenz des cosinus durch cosinus des vielfachen Winkels zu ersetzen. Die Störungsglieder erhalten dann auch wieder die in den bisherigen Integrationen angenommene Form. Bei der Integration betrachte man die Grössen ϱ und ψ als Beständige, und mit Rücksicht darauf, dass dieselben Funktion von $v_,$ allein sind, verfahre man im Uebrigen nach der Methode der variirten Näherung. Man bemerke zugleich, dass die Veränderliche $v_,$ nur in solchen Gliedern der Veränderlichen ϱ und ψ vorkommt, welche den Factor $\sin^2 i$ haben. Die Derivirte der Correction wegen der Veränderlichkeit von $v_,$ in ϱ und ψ hat desshalb neben λ auch den Factor $\sin^2 i$, und ist in Folge dessen eine sehr kleine Grösse. In der Theorie des Mondes, wo beiläufig $\lambda = \frac{1}{13}$ und $\sin i = \frac{1}{11}$ ist, findet man den der Correction beigefügten Factor nahezu $\frac{1}{1600}$. Man darf wohl annehmen, dass die zweite Variation der Grössen ϱ und ψ in allen Fällen, wo das Störungsglied als Funktion von v vorliegt, nicht mehr in Betracht kommt.

Es ist leicht zu sehen, dass sich auf diesem Wege das Integral des Störungsgliedes vortheilhafter gestaltet als auf jenem andern Wege, wo der Integration die Entwicklung von s nach Potenzen von $\mathrm{tg}^2\frac{i}{2}$ vorausgeschickt werden soll. Indem man zunächst nur das erste Glied dieser Entwicklung berücksichtigt, erhält man das Integral in einer Form, welche, als Funktion von v und $v_,$ betrachtet, in Nichts verschieden ist von jenem andern Integrale, worin ϱ und ψ als Beständige angenommen sind. Die Correction des zuersterwähnten Integrals würde aber den Factor $\sin^2 i$ erhalten, während die Correction des auf dem andern Wege erlangten Integrals den weit kleineren Factor $\lambda \sin^2 i$ hat. Daraus ersieht man, dass verschiedene Glieder des auf die Entwicklung nach Potenzen von $\mathrm{tg}^2\frac{i}{2}$ gegründeten Integrals durch das hier vorgeschlagene Verfahren in ein einziges zusammengefasst sind.

Die Grössen ϱ und ψ sollen bei der Integration der Störungsglieder vorläufig als Beständige angesehen werden. Diese Vorschrift ist indessen nur so lange maassgebend, als das Störungsglied selbst Funktion von v ist. Wenn dasselbe gleichfalls Funktion von $v_,$ allein ist, so bringt sie keinen Nutzen mehr. Man wird in diesem Falle die Methode der variirten Näherung nicht in Anwendung bringen, eben so wie man oben im § 26, wo es sich um die Correction wegen der elliptischen Form der äussern Bahn handelt, keinen Gebrauch davon gemacht hat, sobald das Störungsglied als Funktion von $v_,$ allein vorliegt. Um die vollständige Integration in dem vorliegenden Falle auszuführen, wird man die obigen Werthe ϱ, $\sin\psi$ und $\cos\psi$ in das betreffende Störungsglied wieder einsetzen.

Durch die Substitution von ϑ' und i' gibt man den Derivirten ϱ' und ψ', deren man zum Behufe der Variation bedarf, eine vortheilhafte Gestalt. Durch die Differentiation der Gleichung 21. findet man:

$$\varrho\varrho' = -\sin^2 i \sin u_, \cos u_, (v_,' - \vartheta') - \sin^2 u_, \sin i \cos i\, i'.$$

Setzt man die bekannten Werthe der Derivirten ϑ' und i' ein, so geht dies über in:

23. $$\varrho\varrho' = -\sin^2 i \sin u_, \cos u_, v_,' + \frac{\sin^2 i \sin^2 u_,}{n}\,\frac{ds}{du}\,\frac{dU}{ds}.$$

Um auch die Derivirte ψ' zu bestimmen, geht man zweckmässig von der folgenden Gleichung aus:

$$\mathrm{tg}\,(u_, - \psi) = \cos i\,\mathrm{tg}\,u_,.$$

Durch deren Differentiation entsteht zunächst:

$$\frac{u_,' - \psi'}{\cos^2(u_, - \psi)} = \frac{\cos i\, u_,'}{\cos^2 u_,} - \mathrm{tg}\,u_, \sin i\, i'.$$

Indem man mit $\cos^2 u_,$ multiplicirt, erhält man weiter:

$$\varrho^2\psi' = (\varrho^2 - \cos i)(v_,' - \vartheta') + \sin u_, \cos u_, \sin i\, i'.$$

Man setze nun die Derivirten ϑ' und i' ein, und man hat:

$$\varrho^2\psi' = (\varrho^2 - \cos i)\, v_,' + \frac{\varrho^2\cos(u - u_,) - s}{n}\,\frac{dU}{ds}.$$

Indem man bemerkt, dass der Winkel ψ nur in der Verbindung $\omega + \psi$ vorkommt, und dass der Werth der Deri-

virten ω' das Glied $-2\sin^2\frac{i}{2}\,\vartheta'$ hat, gibt man der Derivirten ψ' eine noch vortheilhaftere Gestalt. Man kann schreiben:

$$24.\qquad \varrho^2\left(\psi' + 2\sin^2\frac{i}{2}\,\vartheta'\right) = (\varrho^2 - \cos i)\,v_r' - \frac{\sin^2 i \sin^2 u_r}{n}\,s\,\frac{dU}{ds}\,.$$

Die Derivirten ϱ' nud ψ', welche sich aus den vorstehenden Gleichnngen 23. nnd 24. bestimmen, können immerhin als kleine Grössen der ersten Ordnung aufgefasst werden; nnd könnte man darauf hin versucht sein, die Grössen ϱ und ψ als gestörte Elemente an die Stelle von i und ϑ treten zu lassen. Es ist jedenfalls bemerkenswerth, dass sich bei dieser Wahl der gestörten Elemente die Anzahl der in der Störuugsfunktion vorkommenden gestörten Elemente auf drei beschränken würde. Denn zufolge der oben vorgenommenen Umwandlung finden sich in der Störungsfunktion die Elemente ψ und ω nur in der Verbindung $\omega + \psi$. Die Störungsfunktion würde also nnr die drei gestörten Elemente p, ϱ und $\omega + \psi$ enthalten, während man jetzt genöthigt ist, die vier gestörten Elemente $p\;\omega\;i\;\vartheta$ darin zu unterscheiden. Die Kleinheit der Derivirten ist indessen allein nicht entscheidend für die Wahl der gestörten Elemente. Die Gleichungen 23. und 24. erfüllen nicht die im § 6 ausgesprochenen Forderungen, welche sonst noch an die Beschaffenheit der Störungsgleichungen gestellt sind. Wenn man in den obigen Derivirten ϱ' nnd ψ' die Elemente i und ϑ durch die neuen Elemente ϱ und ψ ersetzt, um alsdann bei der Integration die letzteren als Beständige zu betrachten, so gelangt man nicht zu den ersten Näherungen der neuen Elemente. Daraus folgt, dass in dem Systeme der Differentialgleichungen des § 14 die Gleichungen V. und VI., durch welche die Derivirten i' und ϑ' bestimmt sind, in den Gleichungen 23. und 24. einen Ersatz nicht finden können.

Wenn man die Störungsfunktion nach Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_r}$, und alsdann die Potenzen von r, r_r und s beziehungsweise nach Potenzen von e, e_r und $\operatorname{tg}^2\frac{i}{2}$ entwickelt, so hat man, noch ehe man zur Integration der Störungsgleichung schreitet, in der Störungsfunktion ein System von Gliedern, welches nach vier verschiedenen Richtungen ins Unendliche läuft. Man erhält die möglichst einfache Form der Störungsgleichungen, wenn man sich auf die einzige Entwicklung nach Potenzen von $\frac{r}{r_r}$ beschränkt. Die Theorie des Mondes zeichnet sich insofern vortheilhaft vor anderen Störungsaufgaben aus, als man sich in der Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen von $\frac{r}{r_r}$ mit Rücksicht auf die geringe Grösse dieses Verhältnisses auf einige wenige Glieder beschränken darf, um das Aeusserste der Genauigkeit zu erreichen, welche bei der Vergleichung der berechneten Mondbahn mit den Beobachtungen verlangt wird.

Vierter Abschnitt.

Entwicklung der Störungsgleichungen, und die ersten Näherungen der Elemente in der Theorie des Mondes.

§ 30. Länge und Breite der beiden sich störenden Körper.

Wenn nur zwei Massenpunkte betrachtet werden, so denkt man sich, um die Bewegungserscheinung zu vereinfachen, den einen als ruhend. Die Coordinatenwerthe des andern Massenpunktes, bezogen auf den Ort des ersteren, sind durch einfache Gleichungen ausgedrückt, und die von demselben beschriebene Bahn ist eine krumme Linie, deren Untersuchung wegen ihrer merkwürdigen und leicht zu ermittelnden Eigenschaften einen elementaren Theil der Geometrie ausmacht. Der Umstand, dass die Bewegung in der ungestörten Bahn so einfache Gesetze befolgt, hat die Möglichkeit, dieselben aus der Vergleichung der einzelnen Beobachtungsresultate aufzufinden, einigermaassen nahe gerückt.

Die Bewegung in der gestörten Ellipse, welche durch die Einwirkung eines dritten Körpers entsteht, ist sehr zusammengesetzt. Die Coordinatenwerthe des gestörten Körpers enthalten unendlich viele periodische Glieder, welche einzeln genommen zwar auch wieder eine einfache geometrische Auslegung zulassen, deren Auffindung aus den Beobachtungen aber nur in so weit möglich ist, als sich die den einzelnen Gliedern entsprechenden Erscheinungen mit hinreichender Schärfe von einander trennen lassen. Die Zusammenstellung aller derjenigen Glieder, welche durchaus erforderlich sind, um den Ort des gestörten Körpers für irgend einen Zeitpunkt im Voraus angeben zu können, ist aber mit Hilfe der Analysis möglich, wofern man von der Voraussetzung ausgehen darf, dass das *Newton*'sche Gravitationsgesetz richtig ist.

Abgesehen davon, dass neben der Sonne der Mond schon an und für sich die Aufmerksamkeit mehr auf sich zieht als irgend ein anderer Körper des Weltsystems, ist auch in der Beschaffenheit der Mondstörungen selbst die Anregung in höherem Maasse gegeben, dieselben zu verfolgen. Man weiss, dass dieselben zu einem weit grösseren Betrage anwachsen als irgend eine der Störungen, welche die Planeten in ihrer Bahn um die Sonne erleiden. Da der Mond und die Erde beide fast mit gleicher Kraft von der Sonne angezogen werden, so ist der kleine Unterschied zwischen diesen beiden Anziehungen diejenige Kraft, welche den ersteren in seiner elliptischen Bewegung um die Erde stört. Nimmt man die von der Erde ausgehende Anziehung als Einheit der Kraft an, so haben die beiden vorerwähnten Anziehungen zur Zeit der Opposition und der Conjunction, wo deren Unterschied am grössten ausfällt,

beziehungsweise die ungefähren Werthe $\frac{360000}{(400 \pm 1)^2}$ und $\frac{360000}{400^2}$. Deren Unterschied hat den immerhin ansehnlichen Bruchwerth $\pm \frac{1}{90}$. In Wirklichkeit kann der Gesammtwerth derjenigen Störungen, welche die Länge des Mondes während eines einzigen Umlaufs um die Erde erleidet, bis zu beinahe drei Graden anwachsen.

Um noch eines anderen Umstandes zu gedenken, welcher gleichfalls Anlass sein kann, vor Allem zuerst die Störungen des Mondes zu bestimmen, brauche ich nur daran zu erinnern, dass die Entwicklung der Störungsfunktion, welche für alle Störungsrechnungen ausgeführt werden muss, in der Theorie des Mondes so stark convergirt, dass einige wenige Glieder ausreichend sind, um jede nur wünschenswerthe Genauigkeit zu geben. Diesem Umstande verdankt die Analysis eine wesentliche Vereinfachung. Das Zusammentreffen der verschiedenen Umstände bewirkt, dass die wichtigste und zugleich erfolgreichste Anwendung der Störungstheorie die Bewegung des Mondes zum Gegenstand hat.

Diejenigen Coordinaten, welche als durch die Beobachtung gegeben betrachtet werden können, sind Länge, Breite und Entfernung, bezogen auf den Ort des Centralkörpers. Es bleibt noch übrig, dieselben durch die Polarcoordinaten auszudrücken, welche selbst aus den Störungsgleichungen berechnet werden sollen. Ursprünglich habe ich die beiden sich störenden Körper durch die rechtwinkeligen Coordinaten $x_0\ y_0\ z_0\ x_{0,}\ y_{0,}\ z_{0,}$ auf den Ort des Centralkörpers bezogen. Der Nullpunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems ist alsdann nach einem andern der Ebene der drei Körper angehörigen Punkte verlegt worden. Schliesslich sind die rechtwinkeligen Coordinaten durch Polarcoordinaten ersetzt worden, und ist bei dieser Gelegenheit die Bestimmung getroffen worden, dass die Ebene des Pols in dem bis dahin freien Coordinatensysteme mit der unveränderlichen Ebene des Systems der drei Körper zusammenfalle. Dies hat man sich bei der Bestimmung von Länge und Breite der beiden Massenpunkte zu vergegenwärtigen.

Durch jene anderen rechtwinkeligen Coordinaten, welche an die Stelle von $x_0\ y_0\ z_0\ x_{0,}\ y_{0,}\ z_{0,}$ getreten sind, ist eine willkürliche Beständige ε in die Störungsgleichungen eingeführt worden. Bei Gelegenheit der unten folgenden Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_,}$ wird es sich zeigen, was die Veranlassung ist, vorläufig $\varepsilon = 0$ zu schreiben. Unter dieser Annahme $\varepsilon = 0$ behält man die lineare Transformation:

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\, x_0 = x \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\, x_{0,} = x_, \cos\mu_0 + x \sin\mu_0$$

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\, y_0 = y \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\, y_{0,} = y_, \cos\mu_0 + y \sin\mu_0$$

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\, z_0 = z \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\, z_{0,} = z_, \cos\mu_0 + z \sin\mu_0\,,$$

worin der Winkel μ_0 zu bestimmen ist durch die Gleichungen:

$$\sin\mu_0 = \sqrt{\frac{m\, m_,}{(1+m)(1+m_,)}} \qquad \cos\mu_0 = \sqrt{\frac{1+m+m_,}{(1+m)(1+m_,)}}\,.$$

Indem man die Entfernungen der beiden sich störenden Körper vom Centralkörper mit r_0 und $r_{0,}$ bezeichnet findet man:

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,r_0 = r \qquad\qquad \sqrt{\frac{m_{,}}{1+m_{,}}}\,r_0 = \sqrt{r_{,}^2 \cos^2\mu_0 + 2\,r_{,}\,r\,s \cos\mu_0 \sin\mu_0 + r^2 \sin^2\mu_0}\,.$$

Die Längen und die Breiten der beiden sich störenden Körper mögen mit L $L_{,}$ und B $B_{,}$ bezeichnet sein. Man erhält zunächst die Werthe:

$$\cos B \cos L = \frac{x_0}{r_0} \qquad\qquad \cos B_{,} \cos L_{,} = \frac{x_0}{r_0}$$

$$\cos B \sin L = \frac{y_0}{r_0} \qquad\qquad \cos B_{,} \sin L_{,} = \frac{y_0}{r_0}$$

$$\sin B = \frac{z_0}{r_0} \qquad\qquad \sin B_{,} = \frac{z_0}{r_0}\,,$$

welche alsdann übergehen in:

$$\cos B \cos L = \frac{x}{r} \qquad\qquad \cos B_{,} \cos L_{,} = \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}}\,\frac{1}{r_0}\,(x_{,} \cos\mu_0 + x \sin\mu_0)$$

$$\cos B \sin L = \frac{y}{r} \qquad\qquad \cos B_{,} \sin L_{,} = \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}}\,\frac{1}{r_0}\,(y_{,} \cos\mu_0 + y \sin\mu_0)$$

$$\sin B = \frac{z}{r} \qquad\qquad \sin B_{,} = \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}}\,\frac{1}{r_0}\,(z_{,} \cos\mu_0 + z \sin\mu_0)\,,$$

An die Stelle von x y z $x_{,}$ $y_{,}$ $z_{,}$ sind nun die Polarcoordinaten einzusetzen. Für jenen Fall, dass die Bahn des störenden Körpers, welchem die Coordinaten $x_{,}$ $y_{,}$ $z_{,}$ entsprechen, als eine ungestörte Ellipse aufgefasst werden darf, vereinfacht sich diese Transformation ganz erheblich, weil dann $i_{,} = 0$ gesetzt werden darf. Die unveränderliche Ebene des Systems der drei Körper, welche als Ebene des Pols angenommen ist, fällt dann mit der Ebene des störenden Körpers selbst zusammen. In der Theorie des Mondes ist dies die Ebene der Ecliptik. Indem man sich auf die Betrachtung des hervorgehobenen Falles beschränkt, schreibt man:

$$\frac{x}{r} = \cos^2\frac{i}{2}\cos(u+\vartheta) + \sin^2\frac{i}{2}\cos(u-\vartheta) \qquad\qquad \frac{x_{,}}{r_{,}} = \cos(u_{,}+\vartheta)$$

$$\frac{y}{r} = \cos^2\frac{i}{2}\sin(u+\vartheta) - \sin^2\frac{i}{2}\sin(u-\vartheta) \qquad\qquad \frac{y_{,}}{r_{,}} = \sin(u_{,}+\vartheta)$$

$$\frac{z}{r} = \sin i \sin u \qquad\qquad \frac{z_{,}}{r_{,}} = 0\,.$$

Die Länge und die Breite des gestörten Körpers bestimmen sich dann durch die Gleichungen:

$$\cos B \cos L = \cos^2\frac{i}{2}\cos(u+\vartheta) + \sin^2\frac{i}{2}\cos(u-\vartheta)$$

$$\cos B \sin L = \cos^2\frac{i}{2}\sin(u+\vartheta) - \sin^2\frac{i}{2}\sin(u-\vartheta)$$

$$\sin B = \sin i \sin u\,.$$

Aus der letzten Gleichung berechnet man die Breite des gestörten Körpers. Aus den beiden anderen Gleichungen bildet man durch die Elimination von $\cos^2 \frac{i}{2}$ die weitere:

$$\cos B \sin (L - u - \vartheta) = - \sin^2 \frac{i}{2} \sin 2 u \,.$$

Auf der rechten Seite hat man einen Werth, welcher zwar positiv oder negativ sein kann, im Uebrigen aber wegen der Kleinheit von i immer nur einen kleinen Bruchwerth ausdrückt. Da hiernach kein Zweifel darüber bestehen kann, welchem Quadranten der Winkel $L - u - \vartheta$ angehört, so ist diese einzige Gleichung in allen Fällen ausreichend zur vollständigen Bestimmung der Länge des gestörten Körpers.

Zur Bestimmung von Länge und Breite des störenden Körpers ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\cos B_{,} \cos L_{,} = \sqrt{\frac{1 + m_{,}}{m_{,}}} \frac{r_{,}}{r_0} \left(\cos (u_{,} + \vartheta) \cos \mu_0 + \frac{r}{r_{,}} \cos B \cos L \sin \mu_0\right)$$

$$\cos B_{,} \sin L_{,} = \sqrt{\frac{1 + m_{,}}{m_{,}}} \frac{r_{,}}{r_0} \left(\sin (u_{,} + \vartheta) \cos \mu_0 + \frac{r}{r_{,}} \cos B \sin L \sin \mu_0\right)$$

$$\sin B_{,} = \sqrt{\frac{1 + m_{,}}{m_{,}}} \frac{r}{r_0} \sin B \sin \mu_0 \,.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man $B_{,}$. An die Stelle der beiden andern setze man die daraus abgeleitete:

$$\cos B_{,} \sin (L_{,} - u_{,} - \vartheta) = \sqrt{\frac{1 + m_{,}}{m_{,}}} \frac{r}{r_0} \cos B \sin (L - u_{,} - \vartheta) \sin \mu_0 \,,$$

durch welche die Länge $L_{,}$ jederzeit bestimmt werden kann. Mit Rücksicht auf den Werth $\sin \mu_0$ schreibt man die beiden zu verwendenden Gleichungen etwas einfacher:

$$\sin B_{,} = \sqrt{\frac{m}{1 + m}} \frac{r}{r_0} \sin B$$

$$\cos B_{,} \sin (L_{,} - u_{,} - \vartheta) = \sqrt{\frac{m}{1 + m}} \frac{r}{r_0} \cos B \sin (L - u_{,} - \vartheta) \,.$$

Um in den nun vorliegenden Coordinatenwerthen nur solche Veränderliche einzuführen, welche auch in den Integralen der Störungsgleichungen die maassgebenden sind, erübrigt es noch, $u + \vartheta = v + \omega$ und $u_{,} + \vartheta = v_{,} + \omega_{,}$ zu setzen. Die Gleichungen zur Bestimmung von Länge und Breite des gestörten Körpers sind dann:

1. $$\sin B = \sin i \sin (v + \omega - \vartheta)$$

2. $$\cos B \sin (L - v - \omega) = - \sin^2 \frac{i}{2} \sin 2 (v + \omega - \vartheta) \,.$$

Man sieht, dass die Bestimmung der Längenstörung in erster Linie von dem Elemente ω abhängt, welches durch die Integration der Störungsgleichungen I. bis IV. des § 14 ermittelt wird. Die Breitenstörung weist auf die Störungsgleichungen V. und VI. hin.

In den beiden Coordinatenwerthen des störenden Körpers hat man ausserdem noch den oben gegebenen Werth r_0, einzusetzen. Man findet:

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\,\frac{r}{r_0} = \frac{\frac{r}{r_{,}}\operatorname{tg}\mu_0}{\sqrt{1+2s\frac{r}{r_{,}}\operatorname{tg}\mu_0+\left(\frac{r}{r_{,}}\right)^2\operatorname{tg}^2\mu_0}}.$$

Die Länge und die Breite des störenden Körpers bestimmen sich demnach durch die Gleichungen:

$$\sin B_{,} = \frac{\frac{r}{r_{,}}\operatorname{tg}\mu_0\sin B}{\sqrt{1+2s\frac{r}{r_{,}}\operatorname{tg}\mu_0+\left(\frac{r}{r_{,}}\right)^2\operatorname{tg}^2\mu_0}}$$

$$\cos B_{,}\sin(L_{,}-v_{,}-\omega_{,}) = \frac{\frac{r}{r_{,}}\operatorname{tg}\mu_0\cos B\sin(L-v_{,}-\omega_{,})}{\sqrt{1+2s\frac{r}{r_{,}}\operatorname{tg}\mu_0+\left(\frac{r}{r_{,}}\right)^2\operatorname{tg}^2\mu_0}}.$$

In der Theorie des Mondes darf man wegen der Kleinheit des Werthes $\frac{r}{r_{,}}\operatorname{tg}\mu_0$, welcher beiläufig durch den Bruch $\frac{1}{80.400}$ ausgedrückt ist, den irrationalen Nenner ohne Weiteres der Einheit gleichsetzen. Man behält, da man ausserdem $\operatorname{tg}\mu_0 = \sqrt{m}$ setzen darf, die einfacheren Gleichungen:

3. $$\sin B_{,} = \frac{r}{r_{,}}\sqrt{m}\sin B$$

4. $$\cos B_{,}\sin(L_{,}-v_{,}-\omega_{,}) = \frac{r}{r_{,}}\sqrt{m}\cos B\sin(L-v_{,}-\omega_{,}).$$

Diese, ebenso wie die vorhergehenden allgemeineren Coordinatenwerthe des störenden Körpers sind übrigens, wie schon erwähnt, nur unter der Voraussetzung brauchbar, dass derselbe nicht selbst merkliche Störungen erleide.

In dem allgemeinen Probleme der drei Körper, welches von der Voraussetzung ausgeht, dass sich die beiden Massenpunkte gegenseitig stören, bestehen die Gleichungen 1. und 2. für den einen Massenpunkt m ungeändert fort. Für den andern Massenpunkt $m_{,}$ findet man die weniger einfachen Gleichungen:

$$\sin B_{,} = \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}}\,\frac{r_{,}}{r_0}\left(\sin i_{,}\sin(v_{,}+\omega_{,}-\vartheta)\cos\mu_0+\frac{r}{r_{,}}\sin B\sin\mu_0\right)$$

$$\cos B_{,}\sin(L_{,}-v_{,}-\omega_{,}) = \sqrt{\frac{1+m_{,}}{m_{,}}}\,\frac{r_{,}}{r_0}\left(-\sin^2\frac{i_{,}}{2}\sin 2(v_{,}+\omega_{,}-\vartheta)\cos\mu_0+\frac{r}{r_{,}}\cos B\sin(L-v_{,}-\omega_{,})\sin\mu_0\right).$$

§ 31. Entwicklung der Störungsfunktion in der Theorie des Mondes.

Um die Störungsgleichungen in der Theorie des Mondes integriren zu können, muss man die Störungsfunktion in eine Reihe entwickeln, geordnet nach Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_{,}}$ der Leitstrahlen. Wegen der Kleinheit dieses Verhältnisses ist die Reihenentwicklung so stark convergent, dass schon einige wenige Glieder hinreichen, um den berechneten Störungen diejenige Genauigkeit zu geben, welche eine Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen möglich macht. Welche Glieder der Entwicklung vernachlässigt werden dürfen, dies lässt sich auf Grund der in dem vorigen Paragraphen gegebenen Coordinatenwerthe ermitteln. Die weggelassenen Glieder der Reihenentwicklung sollen nämlich in den Coordinatenwerthen nur solche Aenderungen zur Folge haben, welche für die Beobachtuug verschwinden.

In dem ersten Abschuitte hat die Kräftefunktion die folgende Form erhalten:

$$U = \frac{\varkappa m \sqrt{\frac{m}{1+m}}}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varepsilon + 2 r r_{,} s \cos \varepsilon \sin \varepsilon + r_{,}^2 \sin^2 \varepsilon}} + \frac{\varkappa m m_{,} \sqrt{\frac{m m_{,}}{m + m_{,}}}}{\sqrt{r_{,}^2 \sin^2 (\mu + \varepsilon) - 2 r_{,} r s \sin (\mu + \varepsilon) \cos (\mu + \varepsilon) + r^2 \cos^2 (\mu + \varepsilon)}}$$

$$+ \frac{\varkappa m \sqrt{\frac{m_{,}}{1 + m_{,}}}}{\sqrt{r_{,}^2 \cos^2 (\mu_{,} - \varepsilon) + 2 r_{,} r s \cos (\mu_{,} - \varepsilon) \sin (\mu_{,} - \varepsilon) + r^2 \sin^2 (\mu_{,} - \varepsilon)}}.$$

Die Entwicklung der beiden letzteren Wurzelgrössen führt auf gleicliartige Reihen, deren Glieder sich vereinigen lassen. Beide Reihen ordnen sich nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{r_{,}}$. Die erste Wnrzelgrösse dagegen darf nicht nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{r_{,}}$ geordnet werden. Denn die Grösse ε muss bekanntlich so gewählt sein, dass das Product $\frac{r_{,}}{r}$ tg ε einen kleinen Bruchwerth ausdrückt. In Folge dessen ordnet sich die Entwicklung der ersten Wurzelgrösse nach steigenden Potenzen von $\frac{r_{,}}{r}$. Die Kräftefunktion besteht demnach aus zwei verschiedenartigen Reihenentwicklungen, von denen die eine steigend, die andere fallend nach $\frac{r}{r_{,}}$ geordnet ist.

Die willkürliche Beständige ε der linearen Transformation hat in den Störungsgleichungen, ausserhalb der Störungsfunktion nirgends eine Spur hinterlassen. Es liegt nahe, derselben eine solche Verwendung zu geben, dass sich die Störungsfunktion möglichst einfach gestalte. Denn es ist anzunehmen, dass die einfachere Form der Störungsfunktion auch dem Integrale der Störungsgleichung zu Gute komme, und es erscheint in der Frage über die Art der Verwendung von ε neben der ausgesprochenen Absicht jede andere Rücksicht als untergeordnet. Die Anwesenheit der beiden verschiedenartigen Reihenentwicklungen widerstreitet aber einer Vereinfachung der Störungsfunktion so sehr, dass man sofort veranlasst ist, $\varepsilon = 0$ zu setzen. Die Reihenentwicklung der ersteren Wurzelgrösse fällt dann ganz weg. Auch die Reihenentwicklung der beiden andern Wurzelgrössen erfährt durch die Annahme $\varepsilon = 0$ Vereinfachungen. Ins Besondere verschwindet dann das mit $\frac{r}{r_{,}^2}$ multiplicirte Glied, welches die zweite Stelle in der Entwicklung dieser Wnrzelgrössen einnimmt, was bei einem irgend wie anders gewählten ε nicht der Fall wäre. Ich gebrauche desshalb vorläufig, so lange zu einer andern Wahl von ε keine Veranlassung gegeben ist, die einfachere Kräftefunktion:

$$U = \frac{\varkappa m \sqrt{\frac{m}{1+m}}}{r} + \frac{\varkappa m m_, \sqrt{\frac{m m_,}{m+m_,}}}{\sqrt{r_,^2 \sin^2\mu - 2 r_, r s \sin\mu \cos\mu + r^2 \cos^2\mu}} + \frac{\varkappa m_, \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}}{\sqrt{r_,^2 \cos^2\mu_0 + 2 r_, r s \cos\mu_0 \sin\mu_0 + r^2 \sin^2\mu_0}}.$$

Mit Rücksicht auf die Werthe μ_0 und μ, welche in den §§ 1 und 2 aufgestellt worden sind, findet man die Gleichungen:

$$\frac{m m_,}{\sin\mu}\sqrt{\frac{m m_,}{m+m_,}} = m m_, \sqrt{\frac{m_,(1+m)}{1+m+m_,}}$$

$$\frac{m_,}{\cos\mu_0}\sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}} = m_, \sqrt{\frac{m_,(1+m)}{1+m+m_,}}.$$

Es ergibt sich hiernach in dem zweiten und dritten Bestandtheile der Kräftefunktion der gemeinsame Factor $\frac{\varkappa m_,}{r_,}\sqrt{\frac{m_,(1+m)}{1+m+m_,}}$. Indem man denselben vorläufig ausser Acht lässt, erhält man die Reihenentwicklungen:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r_,} s \cot\mu + \left(\frac{r}{r_,}\right)^2 \cot^2\mu}}$$

$$= m\left(1 + \frac{r}{r_,}\cot\mu\, s + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_,}\cot\mu\right)^2 (3s^2-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_,}\cot\mu\right)^3 (5s^3-3s) + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{r_,}\cot\mu\right)^4 (35s^4 - 30s^2 + 3)\right)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{r}{r_,} s \operatorname{tg}\mu_0 + \left(\frac{r}{r_,}\right)^2 \operatorname{tg}^2\mu_0}}$$

$$= 1 - \frac{r}{r_,}\operatorname{tg}\mu_0\, s + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_,}\operatorname{tg}\mu_0\right)^2 (3s^2-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_,}\operatorname{tg}\mu_0\right)^3 (5s^3-3s) + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{r_,}\operatorname{tg}\mu_0\right)^4 (35s^4 - 30s^2 + 3).$$

Man findet die beiden Werthe:

$$\cot\mu = \sqrt{\frac{m_,}{m(1+m+m_,)}}, \qquad \operatorname{tg}\mu_0 = \sqrt{\frac{m m_,}{1+m+m_,}}.$$

Man setze abkürzend $\frac{m_,}{1+m+m_,} = m_0$, um alsdann die einfacheren Werthe zu schreiben:

$$\cot\mu = \sqrt{\frac{m_0}{m}} \qquad \operatorname{tg}\mu_0 = \sqrt{m m_0},$$

und man erhält durch die Addition der obigen Entwicklungen die Gleichung:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r_,} s \cot\mu + \left(\frac{r}{r_,}\right)^2 \cot^2\mu}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{r}{r_,} s \operatorname{tg}\mu_0 + \left(\frac{r}{r_,}\right)^2 \operatorname{tg}^2\mu_0}}$$

$$= (1+m)\left(1 + \frac{m_0}{2}\left(\frac{r}{r_,}\right)^2 (3s^2-1) + \frac{\sqrt{m_0^3}}{2}\,\frac{1-m}{\sqrt{m}}\left(\frac{r}{r_,}\right)^3 (5s^3-3s) + \frac{m_0^2}{8}\,\frac{1+m+m^2}{m}\left(\frac{r}{r_,}\right)^4 (35s^4 - 30s^2 + 3)\right).$$

Mit Rücksicht auf die im § 8 in die Rechnung eingeführten Abkürzungen:

$$\varkappa\sqrt{\frac{m^3}{1+m}} = p_0^2, \qquad \varkappa\sqrt{\frac{m_,^3(1+m)^2}{1+m+m_,}} = \lambda^2 p_0^2$$

erhält man endlich die Kräftefunktion:

$$U = \frac{p_0^2}{r} + \frac{k^2 p_0^2}{r_,}\left(1 + \frac{m_0}{2}\left(\frac{r}{r_,}\right)^2 (3s^2 - 1) + \frac{\sqrt{m_0}^3}{2}\,\frac{1-m}{\sqrt{m}}\left(\frac{r}{r_,}\right)^3 (5s^3 - 3s) + \frac{m_0^2}{8}\,\frac{1+m+m^2}{m}\left(\frac{r}{r_,}\right)^4 (35s^4 - 30s^2 + 3)\right).$$

Schreibt man nun abkürzend die Kräftefunktion in der Form:

$$U = \frac{p_0^2}{r} + \frac{k^2 p_0^2}{r_,} + \Omega.$$

so ist auch die Störungsfunktion Ω festgestellt. Man erhält, weil in der Theorie des Mondes $p_{0,} = p_,$ gesetzt werden darf,

$$\Omega = \frac{k^2 p_,^2}{r_,}\left(\frac{m_0}{2}\left(\frac{r}{r_,}\right)^2 (3s^2 - 1) + \frac{\sqrt{m_0}^3}{2}\,\frac{1-m}{\sqrt{m}}\left(\frac{r}{r_,}\right)^3 (5s^3 - 3s) + \frac{m_0^2}{8}\,\frac{1+m+m^2}{m}\left(\frac{r}{r_,}\right)^4 (35s^4 - 30s^2 + 3)\right).$$

Man sieht, dass zu jedem weiteren Gliede der Störungsfunktion der Factor $\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_,}$ hinzukommt. In der Theorie des Mondes ist beiläufig $\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_,} = \frac{1}{400}$. Wollte man auch noch das dritte Glied der Störungsfunktion fortlassen, so würde dieselbe einen kleinen Bruchtheil, ungefähr $\frac{1}{160000}$ ihres Werthes einbüssen. Da während eines Mondumlaufs der Gesammtbetrag der Störungen nicht einmal drei Grade ausmacht, so würde unter der Voraussetzung, dass das Integral des vernachlässigten Gliedes in demselben Verhältnisse zu der Gesammtstörung stehe wie die entsprechenden Derivirten zu einander, der so vernachlässigte Theil der Störung ungefähr $\frac{1}{15}$ Bogensecunde ausmachen. Dies überschreitet allerdings die Grenze der Genauigkeit, welche durch die Rechnung erreicht werden soll. Da aber jene Voraussetzung nicht statthaft ist, so muss das dritte Glied der Störungsfunktion doch festgehalten werden.

Dagegen ist in anderer Weise noch eine Vereinfachung der obigen Entwicklung gestattet. Man darf überall $m_0 = 1$ setzen. Da nämlich beiläufig $m = \frac{1}{80}$ und $m_, = 360000$ ist, so findet man, dass der Factor m_0 um den unmerklichen Bruchtheil $\frac{1}{360000}$ von der Einheit verschieden ist. Ebenso darf man in dem letzten Gliede den Coefficienten $1 + m + m^2$ der Einheit gleichsetzen. Die Störungsfunktion ist nun:

$$\Omega = \frac{k^2}{2}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 r^2 \left(3s^2 - 1 + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}(5s^3 - 3s) + \frac{1}{4m}\left(\frac{r}{r_,}\right)^2 (35s^4 - 30s^2 + 3)\right).$$

Zum Behufe der Integration der Störungsgleichungen bedarf es, wie im vorigen Abschnitte gezeigt worden ist, nicht einer Entwicklung der Leitstrahlen nach Potenzen von e und $e_,$. Es kann auch die Entwicklung von s^n nach Potenzen von $\operatorname{tg}^2\frac{i}{2}$ vermieden werden. Man hat desshalb, vgl. § 29, $s = \varrho \cos w$ zu setzen, wo $w = u - u_, + \psi$ ist, und die Grössen ϱ und ψ durch die beiden Gleichungen bestimmt sind:

$$\varrho^2 = 1 - \sin^2 i \sin^2 u_,, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{i}{2}\sin 2u_,}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{i}{2}\cos 2u_,}.$$

Es bleibt also nur noch übrig, die Potenzen von $\cos w$ in die cosinus der Vielfachen von w aufzulösen. Man findet:

$$3s^2 - 1 = 3\varrho^2\cos^2 w - 1 = \frac{3}{2}\varrho^2 - 1 + \frac{3}{2}\varrho^2\cos 2w.$$

$$5s^3 - 3s = 5\varrho^3\cos^3 w - 3\varrho\cos w = \left(\frac{5}{4}\varrho^2 - 1\right)3\varrho\cos w + \frac{5}{4}\varrho^3\cos 3w.$$

In dem dritten Gliede der Störungsfunktion setzt man ohne Weiteres $\varrho = 1$, weil die in Folge dieser Annahme vernachlässigten Bestandtheile ungefähr gleichartig sind mit dem vierten Gliede der Störungsfunktion, welches gleichfalls gestrichen worden ist. Man behält:

$$35s^4 - 30s^2 + 3 = \frac{9}{8} + \frac{5}{2}\cos 2w + \frac{35}{8}\cos 4w.$$

Dies Alles berücksichtigend schreibt man die Störungsfunktion:

$$5. \qquad \Omega = \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3 r^2\left(\frac{3}{2}\varrho^2 - 1 + \frac{3}{2}\varrho^2\cos 2w + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{\prime}}\left[\left(\frac{5}{4}\varrho^2 - 1\right)3\varrho\cos w + \frac{5}{4}\varrho^3\cos 3w\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{32m}\left(\frac{r}{r_{\prime}}\right)^2\left[9 + 20\cos 2w + 35\cos 4w\right]\right).$$

Ausser Ω kommen in den Störungsgleichungen auch die Derivirten $\frac{d\Omega}{dr_{\prime}}$ und $\frac{d\Omega}{ds}$ vor. Die erstere ergibt sich sofort aus dem vorliegenden Werthe Ω. Um die Entwicklung der andern Derivirten angeben zu können, muss man zu der anfänglichen Form der Störungsfunktion zurückkehren. Es ist zunächst:

$$\frac{d\Omega}{ds} = \lambda^2\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3 r^2\left(3s + \frac{3}{2}\frac{1-m}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{\prime}}(5s^2 - 1) + \frac{5}{2m}\left(\frac{r}{r_{\prime}}\right)^2(7s^3 - 3s)\right).$$

Setzt man wieder $s = \varrho\cos w$, so hat man:

$$6. \qquad \frac{d\Omega}{ds} = \lambda^2\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3 r^2\left(3\varrho\cos w + \frac{3}{2}\frac{1-m}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{\prime}}\left[\frac{5}{2}\varrho^2 - 1 + \frac{5}{2}\varrho^2\cos 2w\right] + \frac{5}{8m}\left(\frac{r}{r_{\prime}}\right)^2\left[9\cos w + 7\cos 3w\right]\right).$$

§ 32. Ueber die in der Störungsfunktion zu vernachlässigenden Glieder.

In dem vorstehenden Paragraphen habe ich die Entwicklung der Störungsfunktion so weit ausgeführt, als zur Berechnung der Mondstörungen für nöthig erachtet wird, wenn eine Genauigkeit von 0,1 Bogensecunde erreicht werden soll. Wenn durch die Integration der Störungsglieder nicht auch solche Nenner entständen, welche einen viel kleineren Bruchwerth ausdrücken als jener Coefficient λ, so dürfte man sich ohne Weiteres für überzeugt halten, dass die im vorigen Paragraphen ausgeführte Entwicklung der Störungsfunktion zur Erreichung des gesteckten Zieles ausreichend ist. In Wirklichkeit aber bedarf dies einer weitern Begründung.

Fassen wir nun diejenigen Glieder ins Auge, deren Coefficienten durch die Integration überhaupt einen kleinen Nenner erhalten. Das Störungsglied erhält durch die Integration den Nenner λ, wenn es

Funktion von $v_{,}$ allein ist. Wenn gleichzeitig der Coefficient von $v_{,}$ einen kleinen Bruchwerth darstellt, so gesellt sich dieser Bruchwerth als Factor zu dem Nenner λ des Integrals hinzu. In solcher Weise kann es leicht vorkommen, dass der Zahlenwerth des Integrals den des Störungsgliedes weit übertrifft.

Der Ursprung jener kleinen Coefficienten von $v_{,}$ führt auf die der Zeit proportionalen Glieder in den Elementen ω und ϑ zurück. Es ist:

$$s = \cos^2 \frac{i}{2} \cos(u - u_{,}) + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(u + u_{,}),$$

oder, nachdem man $u + \vartheta = v + \omega$ und $u_{,} + \vartheta = v_{,} + \omega_{,}$ gesetzt hat,

$$s = \cos^2 \frac{i}{2} \cos(v - v_{,} + \omega - \omega_{,}) + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(v + v_{,} + \omega + \omega_{,} - 2\vartheta).$$

Es kommen demnach in der Störungsfunktion vier verschiedene über jede Grenze hinaus wachsende Winkelgrössen vor; ausser v und $v_{,}$ noch die beiden ω und 2ϑ. In der Störungsfunktion ist die Potenz von s jedesmal mit Potenzen von r und $r_{,}$ multiplicirt. Denkt man sich diese verschiedenen Potenzen beziehungsweise nach $\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}$, e und $e_{,}$ entwickelt, alsdann alle Producte trigonometrischer Funktionen in lineare Funktionen dieser Art aufgelöst, so finden sich unter den neuen Gliedern auch solche, welche trigonometrische Funktion der Winkel ω und 2ϑ allein sind. Dies sind diejenigen Störungsglieder, welche vorzugsweise berücksichtigt werden müssen, wenn es sich um einen kleinen Nenner der Integration handelt. Denn die Coefficienten der der Zeit proportionalen Glieder in den Elementen ω und 2ϑ sind beiläufig $\pi = \frac{\lambda}{9}$ und $2\nu = -\frac{\lambda}{9}$.

Am ungünstigsten gestaltet sich das Störungsglied, wenn es Funktion des Winkels $\omega + 2\vartheta$ ist. Man findet, indem man von den genaueren Werthen π und 2ν Gebrauch macht, dass in diesem Falle der Coefficient des der Zeit proportionalen Gliedes ein kleiner Bruchtheil des Werthes $\frac{\lambda}{9}$ ist. Das erwähnte Störungsglied findet sich unter den Bestandtheilen des zweiten Gliedes der Störungsfunktion. In der nach i genommenen Entwicklung von s^3 findet sich nämlich unter den mit $\sin^2 \frac{i}{2}$ multiplicirten ein Glied $\cos\big(2(u - u_{,}) - (u + u_{,})\big) = \cos(u - 3u_{,}) = \cos\big(v - 3v_{,} + \omega - 3\omega_{,} + 2\vartheta\big)$, welches mit Rücksicht auf die beigefügten Factoren r und $r_{,}$ seinerseits ein Glied $\cos(\omega - 3\omega_{,} + 2\vartheta)$ im Gefolge hat.

Die hier in Betracht gezogenen Störungsglieder wären übrigens viel zahlreicher, und würde auch ihre Anwesenheit eine viel weiter ausgeführte Entwicklung der Störungsfunktion nöthig machen, wenn nicht der kleine Nenner, welcher durch die Integration entsteht, ein Gegengewicht hätte in einem kleinen Factor, welcher dem betreffenden Störungsgliede selbst jedenfalls zugetheilt ist. Angenommen, die Potenz von s habe zu der linearen Funktion $\cos(m u \pm m_{,} u_{,})$ geführt, worin m und $m_{,}$ jedenfalls positive ganze Zahlen sind. Wenn nun wegen der beigefügten Factoren r und $r_{,}$ die Winkel v und $v_{,}$ wegfallen, so ist es unvermeidlich, dass das von den Winkeln v und $v_{,}$ frei gewordene Glied den Factor $e^{m} e_{,}^{m_{,}}$ erhält, welcher jedenfalls einen kleinen Bruchwerth ausdrückt. Man sieht zugleich, dass Glieder der besprochenen Art in der Störungsfunktion überhaupt nicht vorkommen würden, wenn $e = 0$ und $e_{,} = 0$ wäre. Die Störungsfunktion enthielte in diesem Falle nur die beiden Winkel u und $u_{,}$, und gleichzeitig mit r und $r_{,}$ würden auch die Elemente ω und 2ϑ wegfallen.

Man kann sich nun leicht überzeugen, dass die in der Entwicklung der Störungsfunktion des

§ 31 weggelassenen Glieder, ungeachtet der etwa vorkommenden kleinen Integrationsnenner, in dem Integrale der Störungsgleichungen in der That unmerklich sind. In der nach Potenzen von $\frac{r}{r_{,}}$ ausgeführten Entwicklung habe ich das vierte Glied gestrichen; ferner habe ich in dem dritten Gliede $i = 0$ gesetzt. Das vollständige dritte Glied der Störungsfunktion stellt einen Bruchwerth dar, welcher nahe bei der Grenze der verlangten Genauigkeit liegt. Der Werth der soeben erwähnten vernachlässigten Glieder ist beiläufig $\frac{1}{400}$ dieses Bruchwerthes.

In der angegebenen Absicht bedarf es nur, dass man die Werthe der kleinen Integrationsnenner mit jenen Factoren vergleiche, welche als Potenzen von e und $e_{,}$ zu den vernachlässigten Gliedern hinzukommen. Was das vernachlässigte vierte Glied der Störungsfunktion betrifft, so finden sich einzelne Bestandtheile multiplicirt mit $\cos(u - u_{,})$, $\cos 3(u - u_{,})$, $\cos 5(u - u_{,})$. Mit Rücksicht auf die beigefügten Factoren r und $r_{,}$ könnte das mit dem Factor $\cos(u - u_{,})$ verbundene Glied am ehesten merklich sein. Man erhält, nachdem man die Winkel v und $v_{,}$ weggebracht hat, an dessen Stelle das neue Glied $e\, e_{,} \cos(\omega - \omega_{,})$. In Betreff jener andern mit $\sin^2 \frac{i}{2}$ multiplicirten Bestandtheile des dritten Gliedes der Störungsfunktion bemerke man, dass dieselben einen der Factoren $\cos(u - u_{,}) \cos(u + u_{,})$ und $\cos 3(u - u_{,}) \cos(u + u_{,})$ haben. An deren Stelle sind alsdann die Factoren $\cos 2u$, $\cos 2u_{,}$, $\cos(4u - 2u_{,})$, $\cos(2u - 4u_{,})$ zu setzen. Unter den von den Winkeln v und $v_{,}$ befreiten Gliedern kommen die von den beiden erstgenannten Factoren herrührenden zunächst in Betracht. Dies sind die beiden Glieder $e^2 \cos 2(\omega - \vartheta)$ und $e_{,}^2 \cos 2(\omega_{,} - \vartheta)$.

Man darf nun nicht ausser Acht lassen, dass sich die Coefficienten der weggelassenen Glieder in den Störungsgliedern zum Theil weniger günstig gestalten als in der Störungsfunktion, welche soeben für sich genommen betrachtet worden ist. Der Störungsgleichung:

I. $$\frac{1}{2} q_{,}' = \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du_{,}} \frac{u_{,}}{r_{,}^2} + \frac{d\Omega}{dr_{,}} r_{,}'$$

kann dies allerdings nicht vorgeworfen werden; wohl aber den beiden Störungsgleichungen:

II. $$-\tau' = \frac{r}{p} \sin v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P\right)$$

III. $$\sigma' = \frac{r}{p} \cos v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P\right) + \frac{3}{2} \frac{ae}{1 - e^2}.$$

Wegen der denselben beigefügten Factoren $\cos v$ und $\sin v$ kann hier eine Einheit in dem Coefficienten von v verloren gehen, ohne dass zu dem trigonometrischen Gliede der Factor e hinzutritt, wie es sonst jedenfalls geschehen würde. In diesem Sinne erleiden die oben erhaltenen Resultate eine Wandlung, wenn es sich um die Integration der Gleichungen II. und III. handelt.

Eine andere Schwierigkeit, welche vorzugsweise die Störungsgleichung:

IV. $$-p_0^2\left(\omega' - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \vartheta'\right) = \left(2 \frac{p}{r} (\tau \sin v - \sigma \cos v) - e \sin v (\tau \cos v + \sigma \sin v)\right)'$$
$$+ \Omega - 2 r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - \frac{3}{2} (q_{,} + a) + P + N$$

betrifft, kann ebensowenig wie die soeben berührte Schwierigkeit Veranlassung sein, in der Entwicklung

der Störungsfunktion weiter zu gehen als oben vorgesehen worden ist. Es wird hier, weil das Element $q_{,}$ als Störungsglied vorkommt, die Störungsfunktion einer zweiten Integration unterworfen. Diejenigen Glieder von $q_{,}$, welche mit einem kleinen Integrationsnenner behaftet sind, erhalten diesen Nenner nun zum zweiten Male, ohne dass die denselben beigefügten Coefficienten im Uebrigen eine Aenderung erleiden. Nachdem man den in der Entwicklung der Störungsfunktion weggelassenen Gliedern zweimal nacheinander den kleinen Integrationsnenner zugetheilt hat, würde deren Vernachlässigung in dem Integrale kaum noch gestattet sein, wenn sich nicht die Coefficienten eben dieser Glieder von vornherein vorzugsweise günstig gestaltet hätten. Man weiss, dass sich in der Gleichung I., welche zur Bestimmung des Elementes $q_{,}$ dient, die Störungsfunktion mit einem weiteren Factor λ verbunden hat. Nimmt man auf diesen Umstand Rücksicht, so findet man, dass die vorgeschlagenen Vernachlässigungen doch noch berechtigt sind.

Das Glied $q_{,}$ kommt zwar auch in den Gleichungen II. und III. vor; aber die daher rührende Schwierigkeit macht sich hier nicht in gleichem Maasse geltend wie in der Gleichung IV. Denn diejenigen Glieder von $q_{,}$, welche einen kleinen Integrationsnenner mitbringen, erhalten denselben nicht sofort zum zweiten Male. Wegen der beigefügten Factoren $\cos v$ und $\sin v$ stellt sich dieser Integrationsnenner erst dann wieder ein, nachdem das betreffende Glied anderweitig noch einen Factor e erhalten hat.

Indem man auf die beiden noch übrigen Störungsgleichungen:

V. $$-ni' = \sin i \cos u \sin u_{,} \frac{d\Omega}{ds}$$

VI. $$-n\vartheta' = \sin u \sin u_{,} \frac{d\Omega}{ds}$$

eingeht, findet man leicht, dass es gestattet ist, in der Entwicklung der Störungsfunktion bei einer noch geringeren Genauigkeit stehn zu bleiben als in den andern Störungsgleichungen. Man darf das dritte Glied der Störungsfunktion hier ohne Weiteres weglassen. Dies ist darin begründet, dass die Derivirte i' den kleinen Factor $\sin i$ hat; dass ferner das Element ϑ, mag man nun die Coordinatenwerthe des § 30, oder mag man die Störungsfunktion selbst in Betracht nehmen, immer nur in solchen Gliedern vorkommt, welche gleichfalls den Factor $\sin i$ haben.

§ 33. Entwicklung der Störungsgleichungen.

Es steht nun nichts mehr im Wege, die vollständige Entwicklung derjenigen Störungsgleichungen, auf deren Integration die Theorie des Mondes beruht, niederzuschreiben. Ich verstehe unter der vollständigen Entwicklung diejenige Form der Störungsgleichungen, deren Glieder unmittelbar, ohne sonstige weitere Entwicklung, nach den im dritten Abschnitte gegebenen Regeln integrirt werden können. Es zeigt sich, dass die Anzahl der Glieder eine verhältnissmässig geringe ist; und in dieser Beziehung gerade zeichnet sich die Theorie des Mondes vor jeder andern Störungsaufgabe vortheilhaft aus.

Betrachten wir zunächst die Gleichungen zur Bestimmung von σ und τ:

II. $$-\tau' = \frac{r}{p} \sin v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P \right)$$

III. $$\sigma' = \frac{r}{p} \cos v \left(\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P \right) + \frac{3}{2} \frac{ae}{1-e^2}.$$

Nachdem man den Werth des Elementes $q_{,}$ eingesetzt hat, bedarf es nur noch der Substitution des Ausdrucks $\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}}$. Die Entwicklung 5. des § 31 gibt auf der Stelle:

$$\Omega - r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} = \lambda^2 p^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Big(3\varrho^2 - 2 + 3\varrho^2 \cos 2w + \frac{5}{8} \frac{1-m}{\sqrt{m}} \frac{r}{r_{,}} \left[(5\varrho^2 - 4)\, 3\varrho \cos w + 5\varrho^3 \cos 3w \right]$$
$$+ \frac{3}{32} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{r_{,}}\right)^2 \left[9 + 20 \cos 2w + 35 \cos 4w \right] \Big).$$

Ein Bestandtheil des ersten Gliedes der Störungsfunktion ist Funktion von $r_{,}$ allein. Wo dies in der Störungsgleichung ebenso ist, hat man den Werth ϱ^2 als Funktion von $u_{,}$ sogleich einzusetzen. Es ist $3\varrho^2 - 2 = 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u_{,} = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i + \frac{3}{2} \sin^2 i \cos 2u_{,}$.

Eben so schnell kann man die Gleichung zur Bestimmung von ω aufstellen:

IV. $$-p_{,}^2 \left(\omega' - 2 \sin^2 \frac{i}{2}\, \vartheta' \right) = \left(2 \frac{p}{r} (\tau \sin v - \sigma \cos v) - e \sin v (\tau \cos v + \sigma \sin v) \right)'$$
$$+ \Omega - 2 r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} - \frac{3}{2} (q_{,} + a) + P + N.$$

Ausser $q_{,}$ hat man hier einzusetzen:

$$\Omega - 2r_{,} \frac{d\Omega}{dr_{,}} = \lambda^2 p^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Big(\frac{7}{4} \left[3\varrho^2 - 2 + 3\varrho^2 \cos 2w \right] + \frac{9}{8} \frac{1-m}{\sqrt{m}} \frac{r}{r_{,}} \left[(5\varrho^2 - 4)\, 3\varrho \cos w + 5\varrho^3 \cos 3w \right]$$
$$+ \frac{11}{64} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{r_{,}}\right)^2 \left[9 + 20 \cos 2w + 35 \cos 4w \right] \Big).$$

In den drei andern Störungsgleichungen kommt die Derivirte $\frac{d\Omega}{ds}$ vor. Zur Bestimmung von $q_{,}$, i und ϑ hat man die Gleichungen:

I. $$\frac{1}{2} q_{,}' = \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du_{,}} \frac{n_{,}}{r_{,}^2} + \frac{d\Omega}{dr_{,}} r_{,}'$$

V. $$\frac{2ni'}{\sin i} = \left(\sin(u - u_{,}) - \sin(u + u_{,}) \right) \frac{d\Omega}{ds}$$

VI. $$-2n\vartheta' = \left(\cos(u - u_{,}) - \cos(u + u_{,}) \right) \frac{d\Omega}{ds}.$$

Mit Rücksicht auf die beabsichtigte Entwicklung bedürfen dieselben einer kleinen Umwandlung. Es ist:

$$s = \cos^2 \frac{i}{2} \cos(u - u_{,}) + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(u + u_{,}).$$

Daraus ergeben sich die beiden Derivirten:

$$-\frac{ds}{du} = \cos^2\frac{i}{2}\sin(u-u_,) + \sin^2\frac{i}{2}\sin(u+u_,),$$

$$\frac{ds}{du_,} = \cos^2\frac{i}{2}\sin(u-u_,) - \sin^2\frac{i}{2}\sin(u+u_,),$$

welche ihrerseits zu der folgenden Gleichung führen:

$$\frac{ds}{du} + \frac{ds}{du_,} + 2\sin^2\frac{i}{2}\sin(u+u_,) = 0.$$

Mit deren Hilfe führt man die Störungsgleichung I., da $s = \varrho\cos w$ und $-\frac{ds}{du} = \dot{\varrho}\sin w$ gegeben sind, über in:

$$\frac{i}{2}\,q_,' = -\left(\frac{ds}{du} + 2\sin^2\frac{i}{2}\sin(u+u_,)\right)\frac{d\Omega}{ds}\frac{v_,}{r_,^2} + \frac{d\Omega}{dr_,}r_,'.$$

Die beiden anderen Störungsgleichungen betreffend eliminire man $\sin(u-u_,)$ und $\cos(u-u_,)$ beziehungsweise mittelst $\frac{ds}{du}$ und s, und führe dieselben dadurch über in:

$$-2n\left(l\sin\frac{i}{2}\right)' = \left(\frac{ds}{du} + \sin(u+u_,)\right)\frac{d\Omega}{ds},$$

$$-2n\cos^2\frac{i}{2}\,\vartheta' \;=\; \left(s - \cos(u+u_,)\right)\frac{d\Omega}{ds},$$

worin l den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

Die Entwicklung $\frac{d\Omega}{ds}\frac{ds}{du} = \frac{d\Omega}{du}$ folgt unmittelbar aus der Entwicklung von Ω. Die Gleichung I. betreffend kann hier nachgeholt werden, dass wegen des der Störungsfunktion beigefügten Factors λ das dritte Glied der Entwicklung vollständig gestrichen werden darf, ebenso wie in den Störungsgleichungen V. und VI. wegen des hier beigefügten Factors $\sin i$. Man schreibt also einfach:

$$-\frac{d\Omega}{du} = \frac{3}{2}\lambda^2 p^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\varrho^2\sin 2w + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{5}{4}\varrho^2 - 1\right)\varrho\sin w + \frac{5}{4}\varrho^3\sin 3w\right]\right).$$

Ferner erhält man auf Grund dieser Vereinfachung der Störungsfunktion die Derivirte:

$$s\frac{d\Omega}{ds} = \lambda^2 p^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(3s^2 + \frac{3}{2}\frac{1-m}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_,}(5s^3 - s)\right),$$

welche alsdann wegen $s = \varrho\cos w$ übergeht in:

$$s\frac{d\Omega}{ds} = \frac{3}{2}\lambda^2 p^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\varrho^2(1+\cos 2w) + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{15}{4}\varrho^2 - 1\right)\varrho\cos w + \frac{5}{4}\varrho^3\cos 3w\right]\right).$$

Schliesslich hat man noch die Entwicklung von $\frac{d\Omega}{ds}$ das Einemal mit $\sin(u+u_,)$, das Anderemal mit $\cos(u+u_,)$ zu multipliciren. Mit Rücksicht auf die Abkürzung $w = u - u_, + \psi$ findet man:

$$\sin(u+u_,)\frac{d\Omega}{ds} = \lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin(u+u_,)\left(3\varrho\cos w + \frac{3}{2}\,\frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\frac{5}{2}\varrho^2 - 1 + \frac{5}{2}\varrho^2\cos 2w\right]\right)$$

$$= \frac{3}{2}\lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Big(\varrho\big(\sin(2u_, - \psi) + \sin(2u+\psi)\big)$$

$$+ \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{5}{2}\varrho^2 - 1\right)\sin(u+u_,) + \frac{5}{4}\varrho^2\big(\sin(3u_, - u - 2\psi) + \sin(3u - u_, + 2\psi)\big)\right]\Big).$$

Ebenso findet man die Entwicklung:

$$\cos(u+u_,)\frac{d\Omega}{ds} = \lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos(u+u_,)\left(3\varrho\cos w + \frac{3}{2}\,\frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\frac{5}{2}\varrho^2 - 1 + \frac{5}{2}\varrho^2\cos 2w\right]\right)$$

$$= \frac{3}{2}\lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Big(\varrho\big(\cos(2u_, - \psi) + \cos(2u+\psi)\big)$$

$$+ \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{5}{2}\varrho^2 - 1\right)\cos(u+u_,) + \frac{5}{4}\varrho^2\big(\cos(3u_, - u - 2\psi) + \cos(3u - u_, + 2\psi)\big)\right]\Big).$$

Das erste Glied jedesmal in diesen Entwicklungen bedarf einer Umwandlung, insofern es Funktion von $v_,$ allein ist. Im § 29 sind desshalb die beiden Gleichungen aufgestellt:

$$\varrho\cos\psi = \cos^2\frac{i}{2} + \sin^2\frac{i}{2}\cos 2u_, , \qquad \varrho\sin\psi = \sin^2\frac{i}{2}\sin 2u_, .$$

Daraus erhält man sofort, zum Behufe der Umwandlung:

$$\varrho\cos(2u_, - \psi) = \cos^2\frac{i}{2}\cos 2u_, + \sin^2\frac{i}{2}, \qquad \varrho\sin(2u_, - \psi) = \cos^2\frac{i}{2}\sin 2u_, .$$

Zur Bestimmung von $q_,$ hat man nun die Gleichung:

I. $$q_,' = 3\lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(\varrho^2\sin 2w + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{5}{4}\varrho^2 - 1\right)\varrho^3\sin w + \frac{5}{4}\varrho\sin 3w\right]\right)$$

$$- 6\sin^2\frac{i}{2}\lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Big(\cos^2\frac{i}{2}\sin 2u_, + \varrho\sin(2u+\psi)$$

$$+ \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{5}{2}\varrho^2 - 1\right)\sin(u+u_,) + \frac{5}{4}\varrho^2\big(\sin(3u_, - u - 2\psi) + \sin(3u - u_, + 2\psi)\big)\right]\Big)$$

$$- 3\lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^4 \left(\frac{r}{p}\right)^2 e_,\sin v_,\left(\frac{3}{2}\varrho^2 - 1 + \frac{3}{2}\varrho^2\cos 2w + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[(5\varrho^2 - 4)\varrho\cos w + \frac{5}{3}\varrho^3\cos 3w\right]\right).$$

Zur Bestimmung von i hat man die Gleichung:

V. $$n\left(l\sin\frac{i}{2}\right)' = \frac{3}{4}\lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(\varrho^2\sin 2w + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{5}{4}\varrho^2 - 1\right)\varrho\sin w + \frac{5}{4}\varrho^3\sin 3w\right]\right)$$

$$- \frac{3}{4}\lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Big(\cos^2\frac{i}{2}\sin 2u_, + \varrho\sin(2u+\psi)$$

$$+ \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left[\left(\frac{5}{2}\varrho^2 - 1\right)\sin(u+u_,) + \frac{5}{4}\varrho^2\big(\sin(3u_, - u - 2\psi) + \sin(3u - u_, + 2\psi)\big)\right]\Big)$$

Der Knoten ϑ bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\text{VI.} \qquad n \cos^2 \frac{i}{2} \vartheta' = -\frac{3}{4} \lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(\varrho^2 \cos 2w + \frac{1-m}{\sqrt{m}} \frac{r}{r_,} \left[\left(\frac{15}{4} \varrho^2 - 1\right) \varrho \cos w + \frac{5}{4} \varrho^3 \cos 3w \right]\right)$$

$$+ \frac{3}{4} \lambda^2 p^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(-\cos^2 \frac{i}{2} \cos i \,(1 - \cos 2u_,) + \varrho \cos (2u + \psi) \right.$$

$$\left. + \frac{1-m}{\sqrt{m}} \frac{r}{r_,} \left[\left(\frac{5}{2} \varrho^2 - 1\right) \cos (u + u_,) + \frac{5}{4} \varrho^2 \left(\cos (3u_, - u - 2\psi) + \cos (3u - u_, + 2\psi)\right)\right]\right)$$

§ 34. Integration der auf die ersten Näherungen einwirkenden Störungsglieder.

Mit Hilfe der in dem dritten Abschnitte gegebenen Reductionsgleichungen kann man nun leicht die erste Näherung der Elemente bis zu einer beliebigen Genauigkeit aufstellen. Ich begnüge mich hier mit den Hauptgliedern der ersten Näherungen. Ich beabsichtige nämlich, die Integration der Störungsglieder erster Ordnung nur so weit auszuführen, als sich der Zahlenwerth des Integrals von dem Einflusse der Störungsglieder zweiter Ordnung unabhängig zeigt. Doch sollen darunter nur diejenigen Störungsglieder der zweiten Ordnung verstanden sein, welche durch die Integration nicht einen kleinen Nenner erhalten. Wenn dieser letztere Fall eintritt, so sollen dieselben gleichfalls berücksichtigt werden, damit eine einigermaassen brauchbare Annäherung erreicht werde. Es lässt sich nachweisen, dass die Abweichung der auf diese Weise berechneten Oerter von den beobachteten höchstens einige wenige Bogenminuten ausmacht.

Die grösste der vorkommenden Störungen, die Evection des Mondes, ist beiläufig gleich $\frac{5}{4}$ Grad und stellt also beiläufig den Bruchwerth $\frac{1}{45}$ dar. Daraus folgt, dass sich an die vorhin ausgesprochene Absicht, die Grenze der Genauigkeit in den zu berechnenden Näherungen betreffend, die Forderung anschliesst, in dem ersten Gliede der Störungsfunktion ausser den grössten Bestandtheilen noch die mit e multiplicirten, und von den mit e^2 oder mit $\sin^2 \frac{i}{2}$ multiplicirten Bestandtheilen auch noch diejenigen beizubehalten, welche durch die Integration den Nenner λ erhalten. Alle übrigen Bestandtheile in dem ersten Gliede der Störungsfunktion dürfen gestrichen werden. Dagegen sollen noch von den in dem zweiten Gliede der Störungsfunktion vorkommenden Bestandtheilen die von e unabhängigen berücksichtigt werden, wenn auch nur für den Fall, dass sie Funktion von $r_,$ allein sind.

Es sollen zunächst die Integrale der einzelnen Störungsglieder zusammengestellt werden, welche überhaupt berücksichtigt werden müssen, damit sich die verlangten Näherungen aufstellen lassen. So lange es sich um die Störungsgleichungen 1. bis IV. handelt, ist die Integrationsarbeit durch den Umstand erleichtert, dass der Winkel $v_,$ immer nur in der Funktion $2w = 2(v - v_, + \omega - \omega_,)$ vorkommt. Aus diesem Grunde hat die Beständige α, welche in die erwähnten Reductionsgleichungen eingeht, in den zu integrirenden Störungsgliedern jedesmal einen und denselben Werth. Es ist in dem dritten Abschnitte abkürzend $m v - m_, v_, = u$, und $m_, \lambda = \alpha$ gesetzt worden. Indem man den Coefficienten von $v_,$ und den Coefficienten π des der Zeit proportionalen Gliedes zusammenfasst, welches in dem Elemente ω vorkommt, findet man $\alpha = 2(\lambda - \pi)$.

Aus der Reductionsgleichung 13. des § 25 erhält man, wenn $n = 1$ und $2w - v$ an die Stelle von u gesetzt wird,

$$\frac{r}{p}\cos(2w-v)=\frac{s(1,\alpha)'}{1-\alpha}-A\,e\cos(2w-2v).$$

Der Coefficient A ist Funktion von α und e^2. Um denselben möglichst zu vereinfachen, ohne desshalb der verlangten Genauigkeit Eintrag zu thun, setze man darin $e^2=0$. Ferner denke man sich denselben nach Potenzen von α entwickelt, und nehme in diese Entwicklung keine höheren Potenzen von α auf als die zweite. Da hier wegen $n=1$

$$\delta=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad\qquad \varepsilon=\frac{2}{3}\,\frac{\alpha}{(1+\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)}$$

ist, so findet man den Coefficienten:

$$A=\frac{1}{2}\,\frac{3-2\alpha}{(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{\alpha^2}{3}=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\alpha+\frac{35}{24}\alpha^2.$$

Man kann demnach die folgende Gleichung anschreiben:

7. $$\frac{r}{p}\cos(2w-v)=\frac{s(1,\alpha)'}{1-\alpha}-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\alpha+\frac{35}{24}\alpha^2\right)e\cos(2w-2v),$$

wo das letzte Glied durch die Integration den Nenner α erhält.

Bei der Aufstellung der Funktion $s(1,\alpha)$ hat man, den andern Vereinfachungen entsprechend, in den Coefficienten der mit e multiplicirten Glieder nur die erste Potenz von α zu berücksichtigen. Es ist:

$$\frac{s(1,\alpha)}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{r}{p}\sin(2w-v)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin v\cos(2w-v)-\frac{\alpha}{3}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin(2w-2v).$$

Indem man ferner die trigonometrischen Funktionen linear macht, erhält man:

$$\frac{s(1,\alpha)}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{r}{p}\sin(2w-v)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin 2w+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha}{6}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin(2w-2v).$$

Man gelangt somit zu dem Integrale:

8. $$\int^{\circ}\frac{r}{p}\cos(2w-v)\,dt=\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{r}{p}\sin(2w-v)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin 2w+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha}{6}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin(2w-2v)$$
$$-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\alpha+\frac{35}{24}\alpha^2\right)e\int^{\circ}\cos(2w-2v)\,dt.$$

Wenn ferner $n=2$ und $u=2w$ gesetzt wird, so geht die Reductionsgleichung 13. über in:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2\cos 2w=\frac{s(2,\alpha)'}{1-\frac{\alpha}{2}}-A\,e\,\frac{r}{p}\cos(2w-v),$$

wo man in der Entwicklung von A nur der ersten Potenz von α bedarf.

Man hat hier:

$$\delta = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{3}}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\left(1+\frac{2}{3}\alpha\right)\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)},$$

und man findet desshalb:

$$A = \frac{1}{3}\,\frac{5-2\alpha}{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)} - \frac{\alpha}{6} = \frac{5}{3}\left(1+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 7. erhält man alsdann:

9. $$\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w = \frac{s(2,\alpha)'}{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{5}{3}\left(1+\frac{\alpha}{3}\right) e\,\frac{s(1,\alpha)'}{1-\alpha} + \frac{5}{2}\,e^2 \cos(2w-2v).$$

Man bemerke noch, dass auch hier das letzte Glied durch die Integration den Nenner α erhält.

Zur Bestimmung von $s(2,\alpha)$ hat man die Gleichung:

$$\frac{s(2,\alpha)}{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w - \frac{1}{3}\left(1+\frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin v \cos 2w - \frac{\alpha}{6}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w-v).$$

Man mache die trigonometrischen Funktionen linear, und man hat:

$$\frac{s(2,\alpha)}{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w - \frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w+v) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{\alpha}{6}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w-v).$$

Da es gestattet ist, in dem dritten Gliede den Factor $\left(\frac{r}{p}\right)^2$ gegen $\frac{r}{p}$ zu vertauschen, so hat man weiter:

$$\frac{s(2,\alpha)}{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{5}{3}\left(1+\frac{\alpha}{3}\right) e\,\frac{s(1,\alpha)}{1-\alpha}$$
$$= \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w - \frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w+v) - \frac{3}{2}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\frac{r}{p}\,e \sin(2w-v).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung gelangt man zu dem Integrale:

10. $$\int^t \left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w\,dt = \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w - \frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w+v) - \frac{3}{2}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\frac{r}{p}\,e \sin(2w-v)$$
$$+ \frac{5}{2}\,e^2 \int^t \cos(2w-2v)\,dt.$$

Man setze nun $n = 3$ und $u = 2w + v$. Die Reductionsgleichung 13. geht über in:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos(2w+v) = \frac{s(3,\alpha)'}{1-\frac{\alpha}{3}} - A\,e\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w,$$

wo in die Entwicklung von A wieder nur die erste Potenz von α aufgenommen zu werden braucht. Man findet hier:

$$\delta = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{4}}\,, \qquad \varepsilon = \frac{2}{5}\;\frac{\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{5}\right)}\,,$$

und alsdann den Coefficienten:

$$A = \frac{1}{4}\;\frac{7-2\alpha}{\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)} - \frac{\alpha}{5} = \frac{7}{4}\left(1+\frac{11}{60}\,\alpha\right).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 9. erhält man die folgende Gleichung:

11. $$\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos(2w+v) = \frac{s(3,\alpha)'}{1-\frac{\alpha}{3}} - \frac{7}{4}\left(1+\frac{11}{60}\,\alpha\right) e\,\frac{s(2,\alpha)'}{1-\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Die Funktion $s(3, \alpha)$ erhält den folgenden Ausdruck:

$$\frac{s(3,\alpha)}{1-\frac{\alpha}{3}} = \frac{1}{3-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w+v) - \frac{1}{4}\left(1+\frac{7}{12}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin v \cos(2w+v) - \frac{\alpha}{10}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin 2w.$$

Diese Gleichung geht über in:

$$\frac{s(3,\alpha)}{1-\frac{\alpha}{3}} = \frac{1}{3-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w+v) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{7}{12}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin(2w+2v) + \frac{1}{8}\left(1-\frac{13}{60}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin 2w.$$

Mit Rücksicht auf die Werthe $s(3, \alpha)$ und $s(2, \alpha)$ erhält man das Integral:

12. $$\int^t \left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos(2w+v)\,dt$$

$$= \frac{1}{3-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w+v) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{7}{12}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin(2w+2v) - \frac{3}{4}\left(1+\frac{5}{6}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \sin 2w\,,$$

nachdem man in dem letzten Gliede des Werthes $s(3, \alpha)$ den Factor $\left(\frac{r}{p}\right)^4$ gegen $\left(\frac{r}{p}\right)^3$ vertauscht hat.

Indem man in den vorliegenden Gleichungen überall $2w$ gegen $2w + \frac{\pi}{2}$ vertauscht, gelangt man zu ähnlichen Integralen, in welchen unter dem Integralzeichen der sinus anstatt des cosinus vorkommt.

Ausser den jetzt betrachteten homogenen Störungsgliedern liegen noch einige andere vor, welche als besondere Fälle der vorstehenden aus denselben hergeleitet werden können, indem man $\alpha = 0$ setzt. Unter dieser Annahme erhält man aus 8. die beiden Integrale:

$$\int^t \frac{r}{p} \cos v\, dt = \frac{r}{p} \sin v - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin 2v - \frac{3}{2}\, e \int^t dt\,,$$

$$-\int^t \frac{r}{p} \sin v\, dt = \frac{r}{p} \cos v - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\,(\cos 2v - 1)\,.$$

Die nicht homogenen Störungsglieder, welche bei der Bestimmung der ersten Näherungen in Betracht kommen, gehören der zweiten Stufe an, und sind als solche mittelst der Reductionsgleichung 18. des § 27 zu integriren. Vertauscht man wieder u mit $2w - v$, und setzt man $n = 3$ und $m = 1$, so geht die Gleichung 18. über in:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos(2w - v) = C\,s(3, -1, -\alpha)' - A\,e\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w + B\,\frac{r}{p}\cos(2w - v)\,.$$

In der Entwicklung der Coefficienten C und B berücksichtige man die zweite Potenz von α, in der des Coefficienten A bedarf es nur der ersten Potenz von α. Man findet zunächst:

$$\delta = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}}\,, \qquad \varepsilon = \frac{2}{5}\,\frac{-\alpha}{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{5}\right)}$$

$$\gamma = \frac{-\alpha}{5 + 3\alpha} \qquad \zeta = \frac{4\left(1 + \frac{3}{5}\,\alpha\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{5}\right)}\,.$$

Daraus ergeben sich die Coefficienten:

$$A = \frac{7}{4}\,\frac{1 + \frac{3}{5}\,\alpha}{1 + \frac{79}{60}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\alpha^2} = \frac{7}{4}\left(1 - \frac{43}{60}\,\alpha\right), \qquad C = \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{5}\right)}{1 + \frac{79}{60}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\alpha^2}\,,$$

$$B = \frac{1}{3}\,\frac{5 + 3\alpha + \frac{\alpha^2}{5}}{1 + \frac{79}{60}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\alpha^2} = \frac{5}{3} - \frac{43}{36}\,\alpha + \frac{35}{36}\,\alpha^2\,.$$

Man schreibt desshalb die Gleichung:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos(2w - v) = C\,s(3 - 1, -\alpha)' - \frac{7}{4}\left(1 - \frac{43}{60}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos 2w + \left(\frac{5}{3} - \frac{43}{36}\,\alpha + \frac{35}{36}\,\alpha^2\right)\frac{r}{p}\cos(2w - v),$$

welche mit Rücksicht auf die obigen Gleichungen 7. und 9. übergeht in:

13. $$\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos(2w - v) = C\,s(3, -1, -\alpha)' - \frac{7}{4}\left(1 - \frac{43}{60}\,\alpha\right)\frac{e\,s(2, \alpha)'}{1 - \frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{5}{3} - \frac{43}{36}\,\alpha + \frac{35}{36}\,\alpha^2\right)\frac{s(1, \alpha)'}{1 - \alpha}$$
$$- \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{24}\,\alpha + \frac{115}{48}\,\alpha^2\right) e\cos(2w - 2v)\,.$$

Zur Bestimmung von $s(3, -1, -\alpha)$ findet man die Gleichung:

$$-\,C\,s(3, -1, -\alpha)$$
$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{19}{36}\,\alpha + \frac{4}{9}\,\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w - v) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{67}{60}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin v\cos(2w - v) + \frac{\alpha}{10}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin 2w\,.$$

Macht man die trigonometrischen Funktionen zu linearen, so ist:

$$-\,C\,s(3, -1, -\alpha)$$
$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{19}{36}\,\alpha + \frac{4}{9}\,\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w - v) + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{19}{60}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin 2w - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{67}{60}\,\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin(2w - 2v)\,.$$

Man darf nun, um mehr Gleichartigkeit unter den Gliedern zu erzielen, die Funktion $s(1, \alpha)$ einer kleinen Aenderung unterwerfen. Das mit e^2 multiplicirte Glied der Gleichung $1 = \left(\frac{p}{r} - e \cos v\right)^2$ vernachlässigend erhält man $\frac{r}{p} = \left(\frac{r}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \cos v$. Es ist gestattet, diesen Werth $\frac{r}{p}$ in das erste Glied der Funktion $s(1, \alpha)$ einzusetzen. Man behält dann:

$$\frac{s(1, \alpha)}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w - v) + \frac{3}{4}\left(1 + \frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin 2w + \frac{5}{4}\left(1 + \frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w - 2v).$$

Ferner ist es gestattet, in den mit e multiplicirten Gliedern die Factoren $\left(\frac{r}{p}\right)^4$ und $\left(\frac{r}{p}\right)^2$ gegen einander zu vertauschen. Man gelangt dann zu dem Integrale:

$$14. \quad \int^{\circ}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos(2w - v)\,dt = (1 + \alpha + \alpha^2)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w - v) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin 2w$$
$$+ \left(\frac{53}{24} + \frac{5\alpha}{48}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w - 2v) - \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{24}\alpha + \frac{115}{48}\alpha^2\right) e \int^{\circ} \cos(2w - 2v)\,dt.$$

Das Integral $\int^{\circ}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w - v)\,dt$ wird aus dem vorliegenden hergeleitet, indem man in der Gleichung 14. überall $2w$ gegen $2w + \frac{\pi}{2}$ vertauscht.

Es sind nuch noch die Integrale derjenigen nicht homogenen Glieder aufzuzeichnen, welche sich aus den soeben integrirten durch die Annahme $\alpha = 0$ herleiten. Man darf dann die beiden Integrale schreiben:

$$\int^{\circ}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos v\,dt = \left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin v + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin 2v - \frac{5}{2} e \int^{\circ} dt$$

$$-\int^{\circ}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin v\,dt = \left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos v + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \cos 2v + \frac{53}{24}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e.$$

Die Reductionsgleichungen des dritten Abschnitts geben das Integral eines Störungsgliedes mit grosser Genauigkeit. Ich muss bemerken, dass die Rechnung weniger geeignet ist, die Vorzüge dieser Reductionsgleichungen in ein vortheilhaftes Licht zu stellen, so lange man sich mit einer so geringen Genauigkeit, wie im Vorstehenden, begnügen will. Es lassen sich dann vielleicht noch andere Wege einschlagen, welche gelegentlich schneller zu diesen genäherten Integralen führen. Ferner könnte es wohl beanstandet werden, dass in den vorstehenden Integralen die beständigen Coefficienten nach Potenzen von α entwickelt worden sind. Zu einer solchen Darstellung ist selbstverständlich in keiner Weise eine Nöthigung gegeben; vielmehr würde diese Darstellungsweise, wenn es sich um die genaueren Werthe der betrachteten Integrale handelt, wenig empfehlenswerth sein. Im Vorstehenden habe ich mehr darauf Bedacht genommen, dass bei der beabsichtigten geringen Annäherung die Coefficienten als Funktion der unbestimmten Grössen e und α in möglichst einfacher Form vorliegen.

§ 35. Die erste Näherung des Parameters.

Um die verlangten Näherungen zu erhalten, darf ich mich in der Gleichung I. auf das erste Glied der Störungsfunktion beschränken. Das Element $q_{,}$ bestimmt sich dann, vgl. § 33, aus der Gleichung:

$$\text{I.} \qquad q_{,}' = 3\lambda^3 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(\sin 2w - \frac{1}{2}\sin^2 i \sin 2u_{,}\right) - \frac{3}{2}\lambda^3 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^4 \left(\frac{r}{p}\right)^2 e_{,} \sin v_{,}\,.$$

Das letzte Glied kommt hier nur desshalb in Betracht, weil der von v unabhängige Bestandtheil durch die Integration den Nenner λ erhält. Man setze desshalb in diesem Gliede $\frac{r}{p} = 1$, und man findet das Integral:

$$-3\lambda \int^{\cdot} \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^4 e_{,} \sin v_{,}\, dt = \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3.$$

Ganz dieselbe Rücksicht ist bei der Integration des zweiten Gliedes zu nehmen. Setzt man hier $\frac{r}{p} = 1$, so erhält man das Hauptglied des Integrals:

$$-2\lambda \int^{\cdot} \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \sin 2u_{,}\, dt = -2\int^{\cdot} \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \sin 2u_{,}\, dv_{,} = \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \cos 2u_{,}\,.$$

Die Gleichung I. geht demnach über in:

$$q_{,} = 3\lambda^3 p_0^2 \int^{\cdot} \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w\, dt + \frac{1}{2}\lambda^3 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{2}\sin^2 i \cos 2u_{,}\right).$$

Die Integration des ersten Gliedes bewerkstelligt sich durch die im vorigen Paragraphen aufgestellte Gleichung 10. Man erhält auf diesem Wege:

$$\int \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w\, dt = \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{-1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos 2w + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \cos(2w+v)\right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right)\frac{r}{p}\, e \cos(2w - v)\right) + \frac{5}{2}e^2 \int \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \sin(2w - 2v)\, dt.$$

Um noch das letzte Glied des Vorliegenden zu integriren, darf man schreiben:

$$\lambda \int^{\cdot} \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \sin(2w - 2v)\, dt = \int^{\cdot} \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \sin(2w - 2v)\, dv_{,} = \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \cos(2w - 2v).$$

Wenn dies Alles oben eingesetzt wird, so findet man:

$$q_{,} = \frac{1}{2}\lambda^3 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(1 + \frac{15}{\alpha}\lambda e^2 \cos(2w - 2v) + \frac{3}{2}\sin^2 i \cos 2u_{,}\right)$$
$$+ 3\lambda^3 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{-1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \cos(2w + v) + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right)\frac{r}{p}\, e \cos(2w - v)\right).$$

Das Element $q_{,}$ kommt zwar in den Coordinatenwerthen nicht vor. Man muss aber die erste Näherung von $q_{,}$ kennen, bevor man zur Bestimmung der Elemente σ τ ω schreitet, weil $q_{,}$ in den Störungsgleichungen II. III. IV. vorkommt. Damit sich die einzelnen Glieder von $q_{,}$ an die Glieder dieser Gleichungen leichter anschliessen, dürfte man in der zweiten Zeile, mit Rücksicht auf den kleinen Werth des Factors λ^2, an die Stelle von $\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3$ auch $\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3$ setzen. Damit ferner die Grösse λ nicht anders als in dem allen Gliedern der Gleichung gemeinsamen Factor λ^2 vorkomme, dürfte man im Uebrigen λ gegen $\frac{\alpha}{2}$ vertauschen. Es ist genau $\frac{\alpha}{2} = \lambda - \pi$, vgl. § 34. Da aber beiläufig $\pi = \frac{\lambda}{9}$ ist, so kann man immerhin auch diese Vereinfachung zugestehen. Man behält den Werth:

15. $$q_{,} = -\frac{1}{2}\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(1 + \frac{15}{2} e^2 \cos(2w - 2v) + \frac{3}{2}\sin^2 i \cos 2u_{,}\right)$$
$$+ \frac{3\alpha}{2}\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{r_{,}}{p_{,}}\right)^3 \left(\frac{-1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e\cos(2w + v) + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right)\frac{r}{p} e\cos(2w - v)\right).$$

Eine Integrationsbeständige braucht hier nicht beigefügt zu werden. Dieselbe würde bei der Substitution von $q_{,}$ in die oben erwähnten Störungsgleichungen mit der willkürlichen Beständigen a zusammenfallen, welche dem Integrale der lebendigen Kraft entsprungen ist.

Das zweite Glied der Störungsfunktion, wiewohl sich sein Verhältniss zum ersten Gliede in dem kleinen Bruchwerthe $\frac{1}{400}$ darstellt, enthält dem ungeachtet einen Bestandtheil, welcher in den Störungsgleichungen II. und III. nicht mehr vernachlässigt werden darf, weil derselbe durch die Integration einen kleinen Nenner erhält. Dagegen darf hier der von $\sin^2 i$ abhängige Bestandtheil des ersten Gliedes der Störungsfunktion wegbleiben. Die in solcher Weise vereinfachten Störungsgleichungen schreiben sich nach § 33:

$$-\tau' = \frac{r}{p}\sin v\left(\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(1 + 3\cos 2w + \frac{15}{8}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{,}}\cos w\right) - q_{,}\right)$$

$$\sigma' = \frac{r}{p}\cos v\left(\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \left(1 + 3\cos 2w + \frac{15}{8}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{,}}\cos w\right) - q_{,}\right) + \frac{3}{2}a e.$$

Bei der Substitution von $q_{,}$ darf man von den sechs Gliedern des obigen Werthes **15.** das zweite und dritte vernachlässigen. Die beiden Störungsgleichungen zeigen dann die folgende Form:

II. $$-\tau' = \lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \frac{r}{p}\sin v\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 - \frac{1}{2} + R\right)$$

III. $$\sigma' = \lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \frac{r}{p}\cos v\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 - \frac{1}{2} + R\right) + \frac{3}{2}a e,$$

worin man abkürzend geschrieben hat:

$$R = \frac{3}{2}\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w - \frac{\alpha}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^3 e\cos(2w + v) - \frac{9}{4}\alpha\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right)\frac{r}{p} e\cos(2w - v) + \frac{15}{8}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{,}}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos w.$$

Indem man die Integrationen des vorigen Paragraphen zu Hilfe nimmt, und nebenbei auch von der identischen Gleichung $\frac{r}{p} = \left(\frac{r}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos v$ Gebrauch macht, findet man die Integrale:

$$\int^{\circ}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2-\frac{1}{2}\right)\frac{r}{p}\cos v\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin v-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin 2v\right)-\frac{7}{4}e\int^{\circ}\left(\frac{p_{\prime}}{p_{\prime}}\right)^3 dt\,.$$

$$-\int^{\circ}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2-\frac{1}{2}\right)\frac{r}{p}\sin v\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos v-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos 2v+\frac{19}{6}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\right).$$

Das letzte Glied der ersteren Zeile betreffend erhält man eine hinreichende Genauigkeit durch den genäherten Werth:

$$\int^{\circ}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3 dt=t+\frac{3e_{\prime}}{\lambda}\sin v_{\prime}\,.$$

Die der Zeit proportionalen Glieder im Integrale der Gleichung III. können den Aufstellungen des § 13 zufolge durch die geeignete Wahl der willkürlichen Beständigen α fortgeschafft werden. Das vorliegende Glied dieser Art fällt in der That weg, wenn man sich zur Bestimmung von α der Gleichung $\frac{3}{2}\alpha=\frac{7}{4}\lambda^2 p_0^2$ bedient.

Das Vorkommen der Elemente σ und τ beschränkt sich auf die beiden Ausdrücke $\tau\cos v+\sigma\sin v$ und $\tau\sin v-\sigma\cos v$. Man ist daher veranlasst, auf Grund des Vorstehenden sofort die folgenden Gleichungen anzuschreiben:

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos v-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos 2v+\frac{19}{6}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\right)\cos v+\left(\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin v-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin 2v\right)\sin v=\left(\frac{r}{p}\right)^3+\frac{35}{12}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos v$$

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos v-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos 2v+\frac{19}{6}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\right)\sin v-\left(\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin v-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin 2v\right)\cos v=\frac{41}{12}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin v\,.$$

Um nun zu den von w abhängigen Gliedern der Gleichungen II. und III. überzugehen, bildet man zunächst die beiden Ausdrücke:

$$\frac{r}{p}\cos v\,R=\frac{3}{4}\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3\left(\cos(2w+v)+\cos(2w-v)\right)+\frac{15}{16}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{\prime}}\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos(w-v)$$
$$-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\left(\cos(2w+2v)+\cos 2w\right)-\frac{9}{8}\alpha\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\left(\cos 2w+\cos(2w-2v)\right)$$

$$\frac{r}{p}\sin v\,R=\frac{3}{4}\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3\left(\sin(2w+v)-\sin(2w-v)\right)-\frac{15}{16}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{r}{r_{\prime}}\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin(w-v)$$
$$-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\left(\sin(2w+2v)-\sin 2w\right)-\frac{9}{8}\alpha\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\left(\sin 2w-\sin(2w-2v)\right).$$

Mit Hilfe der Gleichung 12. des vorigen Paragraphen erhält man die zusammengesetzten Integrale:

$$\int\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{3}{4}\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos(2w+v)-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\cos(2w+2v)-\frac{9}{8}\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos 2w\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(1+\frac{7}{12}\alpha+\frac{23}{72}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin(2w+v)-\frac{3}{8}(1+\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin(2w+2v)-\frac{9}{4}\left(1+\frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin 2w\right),$$

$$-\int\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{3}{4}\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin(2w+v)-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin(2w+2v)-\frac{9}{8}\alpha\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin 2w\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(1+\frac{7}{12}\alpha+\frac{23}{72}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos(2w+v)-\frac{3}{8}(1+\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\cos(2w+2v)-\frac{9}{4}\left(1+\frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos 2w\right).$$

Indem man ferner in der Gleichung 14. des vorigen Paragraphen den Factor $\left(\frac{r}{p}\right)^2$ des dritten Gliedes auf der rechten Seite der Einheit gleichsetzt, um dasselbe dem vierten Gliede gleichartig zu machen, schreibt man das einfachere Integral:

$$\int\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos(2w-v)\,dt=\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left((1+\alpha+\alpha^2)\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin(2w-v)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin 2w\right)$$
$$+\frac{5}{2}(1+\alpha+\alpha^2)\frac{e}{\alpha}\,\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\sin(2w-2v).$$

Man gelangt alsdann zu den zusammengesetzen Integralen:

$$\int\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{3}{4}\,\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos(2w-v)-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\cos 2w-\frac{9\alpha}{8}\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos(2w-2v)+\frac{15}{16}\,\frac{1}{\sqrt{m}}\,\frac{p_0}{p_{\prime}}\cos(w-v)\right)dt$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(1+\frac{5}{4}\alpha+\frac{11}{8}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin(2w-v)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin 2w\right)$$
$$+\frac{15}{4}\left(1+\frac{31}{20}\alpha+\frac{73}{40}\alpha^2\right)\frac{e}{\alpha}\,\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\sin(2w-2v)-\frac{15}{16}\,\frac{1}{\lambda\sqrt{m}}\,\frac{p_0}{p_{\prime}}\sin(w-v).$$

$$-\int\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{3}{4}\,\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin(2w-v)-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\sin 2w-\frac{9\alpha}{8}\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin(2w-2v)+\frac{15}{16}\,\frac{1}{\sqrt{m}}\,\frac{p_0}{p_{\prime}}\sin(w-v)\right)dt$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\left(1+\frac{5}{4}\alpha+\frac{11}{8}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos(2w-v)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\cos 2w\right)$$
$$+\frac{15}{4}\left(1+\frac{31}{20}\alpha+\frac{73}{40}\alpha^2\right)\frac{e}{\alpha}\,\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\cos(2w-2v)-\frac{15}{16}\,\frac{1}{\lambda\sqrt{m}}\,\frac{p_0}{p_{\prime}}\cos(w-v).$$

Man ist nun im Stande, die ersten Näherungen der beiden Veränderlichen $\tau\cos v+\sigma\sin v$ und $\tau\sin v-\sigma\cos v$ sofort anzuschreiben. Man findet:

$$\tau\cos v+\sigma\sin v=\lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r}{p}\right)^2+\frac{35}{24}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos v\right)-\frac{21}{4}\lambda p_0^2 e\,e_{\prime}\sin v\sin v_{\prime}$$
$$+\lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{12}\alpha+\frac{23}{72}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos 2w-\frac{3}{16}(1+\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\cos(2w+v)-\frac{9}{8}\left(1+\frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos(2w-v)\right)$$
$$-\lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{3}{2}\left(1+\frac{5}{4}\alpha+\frac{11}{8}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos 2w+\frac{3}{8}\left(1+\frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e\cos(2w+v)\right)$$
$$-\frac{15}{4}\left(1+\frac{31}{20}\alpha+\frac{73}{40}\alpha^2\right)\lambda^2 p_0^2\,\frac{e}{\alpha}\,\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\cos(2w-v)+\frac{15}{16}\,\frac{\lambda p_0^2}{\sqrt{m}}\,\frac{p_0}{p_{\prime}}\cos w.$$

Die Glieder der zweiten Zeile dieser Gleichung lassen sich mit den entsprechenden nachfolgenden Gliedern vereinigen. Man darf ferner nicht ausser Acht lassen, dass den oben aufgestellten Näherungen der Elemente τ und σ zwei Integrationsbeständige τ_0 und σ_0 beizufügen sind. Die Integrationsbeständige σ_0 soll nach den Ausführungen des § 13 gleich Null gesetzt werden. Dieselbe findet einen Ersatz in der Integrationsbeständigen c der Gleichung $v'=\left(\frac{p}{r}\right)^2$. Auch die andere Integrationsbeständige τ_0 dürfte gleich Null gesetzt werden, weil sie in der willkürlichen Beständigen e einen Ersatz finden kann. Es wird sich aber zeigen, dass es vorzuziehen ist, dieselbe neben der Beständigen e vorerst unbestimmt zu lassen, um gelegentlich noch anderen Rücksichten Rechnung tragen zu können. Setzt man schliesslich in dem

ersten Gliede rechts der obigen Gleichung anstatt des Factors $1 + \frac{35}{12}\frac{p}{r} e \cos v$ den Näherungswerth $\left(\frac{p}{r}\right)^3$, so behält man die folgende Gleichung:

16. $$(\tau - \tau_0)\cos v + \sigma \sin v = \frac{1}{2}\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 - \frac{21}{4}\lambda p_0^2 e e_{,} \sin v \sin r,$$
$$- \lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \left(\left(1 + \frac{19}{12}\alpha + 1{,}9\,\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \cos 2w + \left(\frac{9}{16} + \frac{25}{32}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \cos(2w + v)\right)$$
$$- \frac{15}{8}(2 + 3{,}7\,\alpha + 4{,}6\,\alpha^2)\lambda^2 p_0^2 \frac{e}{\alpha}\frac{p_{,}}{r_{,}} \cos(2w - v) + \frac{15}{16}\frac{\lambda\, p_0^2}{f\, m}\frac{p_0}{p_{,}} \cos w\,.$$

Die andere der beiden oben erwähnten Veränderlichen betreffend findet man:

$$\tau \sin v - \sigma \cos v = \frac{41}{24}\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin v + \frac{21}{4}\lambda p_0^2 e e_{,} \cos v \sin r,$$
$$- \lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{12}\alpha + \frac{23}{72}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin 2w - \frac{3}{16}(1 + \alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin(2w + v) - \frac{9}{8}\left(1 + \frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin(2w - v)\right)$$
$$- \lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\left(1 + \frac{5}{4}\alpha + \frac{11}{8}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin 2w + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{19}{12}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin(2w + v)\right)$$
$$- \frac{15}{4}\left(1 + \frac{31}{20}\alpha + \frac{73}{40}\alpha^2\right)\lambda^2 p_0^2 \frac{e}{\alpha}\frac{p_{,}}{r_{,}} \sin(2w - v) + \frac{15}{16}\frac{\lambda\, p_0^2}{f\, m}\frac{p_0}{p_{,}} \sin w\,.$$

Indem man hier wieder die Glieder der zweiten mit den entsprechenden nachfolgenden Gliedern verbindet, indem man ferner die Integrationsbeständige τ_0 einführt, und in dem ersten Gliede rechts den Coefficienten $\frac{41}{24}$ abkürzend gleich $\frac{7}{4}$ setzt, gelangt man zu der einfacheren Gleichung:

17. $$(\tau - \tau_0)\sin v - \sigma \cos v = \frac{7}{4}\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 e \sin v + \frac{21}{4}\lambda p_0^2 e e_{,} \cos v \sin r,$$
$$- \lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \left(2\left(1 + \frac{13}{12}\alpha + \frac{10}{9}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin 2w + \left(\frac{3}{16} + \frac{13}{32}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^4 e \sin(2w + v)\right)$$
$$- \frac{15}{8}(2 + 2{,}5\,\alpha + 2{,}7\,\alpha^2)\lambda^2 p_0^2 \frac{e}{\alpha}\frac{p_{,}}{r_{,}} \sin(2w - v) + \frac{15}{16}\frac{\lambda\, p_0^2}{f\, m}\frac{p_0}{p_{,}} \sin w.$$

Die Gleichung 16. liefert den Parameter, der Gleichung 17. bedarf man zur Herleitung des Elementes ω. Im § 13 ist zur Bestimmung des Parameters die folgende Gleichung aufgestellt worden:

$$p^2 - p_0^2 + \frac{2\alpha}{1 - e^2} = 2\frac{p}{r}(\tau \cos v + \sigma \sin v)\,.$$

Indem ich es vorziehe, der Integrationsbeständigen die Bezeichnung $- p_0^2 \tau_0$ anstatt τ_0 zu geben, führe ich auf Grund der Gleichung 16. die vorliegende Gleichung über in:

18. $$\frac{p^2}{p_0^2} = 1 - \frac{7\lambda^2}{3} - 2\tau_0 \frac{p}{r}\cos v + \lambda^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3 \frac{p}{r} - \frac{21}{2}\lambda e e_{,} \sin v \sin r,$$
$$- \lambda^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2 \left(2(1 + 1{,}58\,\alpha + 1{,}9\,\alpha^2)\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w + \frac{9}{8}(1 + 1{,}4\,\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \cos(2w + v)\right)$$
$$- \frac{15\lambda^2}{2\alpha}(1 + 1{,}85\,\alpha + 2{,}3\,\alpha^2)\frac{p_{,}}{r_{,}}\frac{p}{r} e \cos(2w - v) + \frac{15}{8}\frac{\lambda}{f\, m}\frac{p_0}{p_{,}} \cos w\,.$$

Bei der Integration der Gleichungen II. und III. begegnet man grösseren Schwierigkeiten, als irgend eine der übrigen Störungsgleichungen bietet. Man hat schon vorhin gesehen, dass man, um die verlangten Näherungen herzuleiten, das zweite Glied in der Entwicklung der Störungsfunktion berücksichtigen muss; während dasselbe in den übrigen Störungsgleichungen vernachlässigt werden darf. Eine grössere Schwierigkeit zeigt sich bei der Integration der Störungsglieder zweiter Ordnung. In den übrigen Störungsgleichungen sind dieselben von solcher Art, dass das Integral des einzelnen Gliedes jedesmal eine Bogenminute nicht beträchtlich übersteigt. In den Gleichungen II. und III. aber finden sich einige Störungsglieder der zweiten Ordnung, deren Integrale des beigefügten kleinen Nenners wegen einen über diese Grenze weit hinausgehenden Werth haben. Wenn die in der Näherung weggelassenen Glieder einzeln genommen eine Bogenminute nicht beträchtlich überschreiten sollen, so versteht es sich, dass derartige Störungsglieder der zweiten Ordnung nicht unberücksichtigt bleiben dürfen. Ein Näheres darüber kann erst unten gegeben werden, nachdem man auch die erste Näherung von ω aufgestellt hat.

§ 36. Die erste Näherung der Längen- und Breiten-Störung.

Nachdem man die Elemente q, σ und τ bestimmt hat, gelangt man auch zu dem Elemente ω. In der Störungsgleichung IV. darf man, um die oben verlangte Genauigkeit zu erreichen, die Störungsfunktion auf das erste Glied derselben beschräuken. Man schreibt daher die Gleichung:

$$p_0^2\,\omega' = -\Big(2\,\frac{p}{r}\,(\tau \sin v - \sigma \cos v) - e \sin v\,(\tau \cos v + \sigma \sin v)\Big)'$$
$$-\frac{7}{4}\,\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \Big(1 + 3\cos 2w + \frac{3}{2}\sin^2 i \cos 2u_,\Big) + \frac{3}{2}\,(q_, + a)\,,$$

worin $\frac{3a}{2} = \frac{7}{4}\,\lambda^2 p_0^2$ zu setzen ist. Bei der Substitution von $q_,$ dürfte man in dem oben gefundenen Werthe 15. nur etwa die mit $\alpha^2 e$ multiplicirten Glieder streichen. Die Gleichung IV. geht dann über in:

$$p_0^2\,\omega' = -\Big(2\,\frac{p}{r}\,(\tau \sin v - \sigma \cos v) - e \sin v\,(\tau \cos v + \sigma \sin v)\Big)'$$
$$-\frac{7}{4}\,\lambda^2 p_0^2 \Big(\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1\Big) + \frac{3}{4}\,\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \Big(1 + \frac{15}{2}\,e^2 \cos(2w - 2v) - 2\sin^2 i \cos 2u_,\Big)$$
$$-\frac{3}{2}\,\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \Big(\frac{7-2\alpha}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w - \frac{\alpha}{4}\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \cos(2w + v) - \frac{9\alpha}{4}\,\frac{r}{p}\,e \cos(2w - v)\Big)\,.$$

Die Integration bietet keine besondere Schwierigkeit. Man findet zunächst:

$$\int \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^3 dt = -2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \frac{r}{p}\,e \sin v + \int \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 dt\,.$$

Daraus folgt das zusammengesetztere Integral:

$$-\frac{7}{4}\int \Big(\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1\Big) dt + \frac{3}{4}\int \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 dt = \frac{7}{2}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \frac{r}{p}\,e \sin v + \frac{3}{4}\,t - \frac{3\,e_,}{\lambda}\sin v_,\,.$$

Bei einer genaueren Rechnung würde man in dem Elemente ω das mit t multiplicirte Glied von dem mit $v_\prime$ multiplicirten unterscheiden. Das erstere entsteht durch die Integration des beständigen Gliedes $\frac{3}{2}\alpha$. In allen übrigen dahin gehörigen Störungsgliedern gibt die Integration angemessener den Winkel $v_\prime$. Man kann übrigens leicht die eine Form des Integrals auf die andere zurückführen, da sich bekanntlich die Differenz $v_\prime - \lambda t$ als trigonometrische Funktion von $v_\prime$ darstellen lässt.

Die Gleichung 10. des § 34 gibt das Integral:

$$\int \left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3 \left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w\,dt = \left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3 \left(\frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w - \frac{1}{6}\left(1+\frac{5\alpha}{6}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \sin(2w+v) - \frac{3}{2}\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\frac{r}{p} e \sin(2w-v)\right)$$
$$- \frac{5e^2}{2\alpha}\frac{p_\prime}{r_\prime}\sin(2w-2v).$$

In Folge dessen erhält man durch die Integration der Gleichung IV:

$$p_0^2(\omega-\omega_0) = -2\frac{p}{r}(\tau \sin v - \sigma \cos v) + e \sin v(\tau \cos v + \sigma \sin v)$$
$$+ \lambda^2 p_0^2\left(\frac{7}{2}\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3 \frac{r}{p} e \sin v + \frac{3}{4}t - \frac{3e_\prime}{\lambda}\sin v_\prime\right) + \frac{3}{4}\lambda p_0^2 \frac{p_\prime}{r_\prime}\left(5e^2 \sin(2w-2v) - \sin^2 i \sin 2u_\prime\right)$$
$$- \lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3\left(\frac{3}{8}\left(7+5\alpha+\frac{1}{4}3\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w - \left(\frac{7}{8}+\frac{25}{24}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \sin(2w+v) - \frac{9}{8}(7+15\alpha)\frac{r}{p} e \sin(2w-v)\right).$$

Die Gleichungen 16. und 17. des vorigen Paragraphen geben ferner den Werth:

$$-2\frac{p}{r}(\tau \sin v - \sigma \cos v) + e \sin v(\tau \cos v + \sigma \sin v)$$
$$= -\tau_0\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin v - 3\lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3 \frac{r}{p} e \sin v - \frac{21}{2}\lambda p_0^2 e\, e_\prime \cos v \sin v_\prime$$
$$+ \lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3\left(\left(4+\frac{13}{3}\alpha+\frac{40}{9}\alpha^2\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w + \left(\frac{3}{8}+\frac{13}{16}\alpha\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin(2w+v)\right)$$
$$+ \frac{15}{4}(2+2{,}5\alpha+2{,}7\alpha^2)\lambda^2 p_0^2 \frac{e}{\alpha}\frac{p_\prime}{r_\prime}\frac{p}{r}\sin(2w-v) - \frac{15}{8}\frac{\lambda p_0^2}{\sqrt{m}}\frac{p_0}{p_\prime}\sin w$$
$$- \lambda^2 p_0^2\left(1+\frac{19}{12}\alpha\right)\frac{e}{2}\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\sin(2w+v) - \sin(2w-v)\right) - \lambda^2 p_0^2 \frac{15e^2}{8\alpha}\frac{p_\prime}{r_\prime}\left(\sin 2w - \sin(2w-2v)\right).$$

Man setze dies in das vorstehende Integral ein. Man vertausche wieder τ_0 gegen $-p_0^2\tau_0$, um alsdann den gemeinsamen Factor p_0^2 streichen zu können. Man erhält die Gleichung:

19.
$$\omega - \omega_0 = \tau_0\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin v + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3 \frac{r}{p} e \sin v + \frac{3}{4}\lambda^2 t$$
$$- 3\lambda\left(1+\frac{7}{2}e\cos v\right)e_\prime \sin v_\prime + \frac{3\lambda}{4}\left(\frac{25}{4}e^2 \sin(2w-2v) - \sin^2 i \sin 2u_\prime\right)$$
$$+ \lambda^2\left(\frac{11}{8}(1+1{,}79\alpha+2{,}3\alpha^2) - \frac{15}{8}\frac{e^2}{\alpha}\right)\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w + \frac{3\lambda^2}{4}(1+1{,}4\alpha)\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \sin(2w+v)$$
$$+ \frac{15\lambda^2}{2\alpha}(1+2{,}37\alpha+3{,}7\alpha^2)\frac{p_\prime}{r_\prime}\frac{p}{r} e \sin(2w-v) - \frac{15}{8}\frac{\lambda}{\sqrt{m}}\frac{p_0}{p_\prime}\sin w.$$

Dies ist die erste Näherung des Perigäums, welches Element den Hauptbestandtheil in der Längenstörung des Mondes ausmacht. Die erste Zeile enthält das der Zeit proportionale Glied. Die zweite Zeile enthält diejenige Störung in der Länge des Mondes, welche unter dem Namen der jährlichen Gleichung

bekannt ist. Das erste Glied der dritten Zeile gibt die Variation, das erste Glied der vierten Zeile die Evection des Mondes.

Um die Breitenstörung in ihrer ersten Näherung aufstellen zu können, muss man neben ω auch die Elemente i und ϑ kennen. Wollte man die Integration der Störungsgleichungen V. und VI. mit derselben Genauigkeit ausführen, welche oben für die andern Störungsgleichungen gefordert worden ist, so wäre die der berechneten Breitenstörung entsprechende Fehlergrenze beträchtlich kleiner als sie für die obige Längenstörung gefunden wird. Da $n_0 = p_0^2$ ist, so bestimmen sich die ersten Näherungen von i und ϑ aus den Gleichungen:

$$\left(l \sin \frac{i}{2}\right)' = -\frac{3\lambda^2}{4}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2(\sin 2u_, + \sin 2u - \sin 2w)$$

$$\vartheta' = -\frac{3\lambda^2}{4}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2.(1 - \cos 2u_, - \cos 2u + \cos 2w).$$

Indem man sich zum Behufe der Integration dieser Gleichungen der Hilfsmittel des vorigen Abschnittes bedient, ist man genöthigt, in Bezug auf jenen Coefficienten von $v_,$, welcher mit α bezeichnet in die dort entwickelten Formeln eingeht, dreierlei Glieder zu unterscheiden. In den vorhin integrirten Störungsgliedern hat sich immer nur ein und derselbe Werth $\alpha = 2(\lambda - \varkappa)$ gefunden. Das Vorkommen des Winkels $v_,$ war dort, soweit man der soeben erwähnten Integrationsregeln überhaupt bedürftig war, auf die Funktion $2w = 2(v - v_, + \omega - \omega_,)$ beschränkt. Man hat aber jetzt ausserdem noch die beiden Winkel $2u_, = 2(v_, + \omega_, - \vartheta)$ und $2u = 2(v + \omega - \vartheta)$ in Betracht zu nehmen. Das Einemal ist der erwähnte Coefficient $\alpha_, = -2(\lambda - \nu)$; das Anderemal $\alpha_2 = -2(\varkappa - \nu)$. Auffallend klein zeigt sich der letztere Coefficient. Da beiläufig $\varkappa = \frac{\lambda}{9}$ und $2\nu = -\frac{\lambda}{9}$ ist, so kann man $\alpha_2 = -\frac{\lambda}{3}$ setzen. Wegen dieses kleinen Coefficienten fällt der mit e^2 multiplicirte Bestandtheil im Integral des Störungsgliedes sehr merklich ins Gewicht. Die genauere Rechnung auf Grund der Gleichung 10. gibt:

$$\int\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\cos 2u\,dt = \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{1}{2-\alpha_2}\left(\frac{r}{p}\right)^2\sin 2u - \frac{1}{6}\left(1+\frac{5\alpha_2}{6}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e\sin(2u+v) - \frac{3}{2}\left(1+\frac{3\alpha_2}{2}\right)\frac{r}{p}e\sin(2u-v)\right)$$
$$+\frac{15e^2}{2\lambda}\frac{p_,}{r_,}\sin(2u-2v).$$

$$-\int\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\sin 2u\,dt = \left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{1}{2-\alpha_2}\left(\frac{r}{p}\right)^2\cos 2u - \frac{1}{6}\left(1+\frac{5\alpha_2}{6}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\cos(2u+v) - \frac{3}{2}\left(1+\frac{3\alpha_2}{2}\right)\frac{r}{p}e\cos(2u-v)\right)$$
$$+\frac{15e^2}{2\lambda}\frac{p_,}{r_,}\cos(2u-2v).$$

Es ist nahezu $\frac{15e^2}{\lambda} = \frac{3}{5}$; und man sieht nun, dass das in Rede stehende Glied des Integrals ungeachtet des Factors e^2 kaum kleiner ist als das erste von e unabhängige Glied.

Mit einer geringeren Genauigkeit vorlieb nehmend schreibt man sofort die beiden Näherungen:

20. $\vartheta - \vartheta_0 = -\frac{3}{4}\lambda(v_, + e_, \sin v_,)$
$$+\frac{3}{8}(\lambda+\nu)\frac{p_,}{r_,}\sin 2u_, + \frac{45}{8}\lambda e^2\frac{p_,}{r_,}\sin(2u-2v) - \frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left((1+\lambda)\sin 2w - \sin 2u\right).$$

21. $l\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2} = \frac{3}{8}(\lambda+\nu)\frac{p_,}{r_,}\cos 2u_, + \frac{45}{8}\lambda e^2\frac{p_,}{r_,}\cos(2u-2v) - \frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left((1+\lambda)\cos 2w - \cos 2u\right).$

§ 37. Ueber die Bestimmung der beiden willkürlichen Beständigen e und τ_0.

Von den beiden willkürlichen Beständigen e und τ_0, welche in den Integralen vorkommen, ist die eine überzählig. Man darf einen beliebigen Werth, auch den Werth Null, an deren Stelle setzen, da dann die andere immer noch so bestimmt werden kann, dass sich die Forderungen der besonderen Aufgabe erfüllen. Wenn der Zahlenwerth in Betracht kommt, zu welchem die Variation des Elementes anwächst, so ist übrigens die Wahl der willkürlichen Beständigen e und τ_0 nichts weniger als gleichgiltig. Die Grösse der Variation des Elementes hat einen wesentlichen Einfluss auf die Convergenz des Integrals, insofern als man, um eine bestimmte Genauigkeit des Integrals zu erreichen, zu den Störungsgliedern um so höherer Ordnung fortschreiten muss, je grösser die Variation des Elementes ist.

Setzt man, wie es in der Theorie des Mondes üblich ist, den Werth $e = \frac{1}{18}$, so findet man $\tau_0 = 0$. Wollte man die Excentricität $e = 0$ annehmen, wollte man also in der Theorie des Mondes von der kreisförmigen Bahn ausgehen, so würde man finden, dass die Grösse $2\,\tau_0$, welche den Coefficienten je eines Gliedes in den beiden gestörten Elementen p und ω darstellt, beiläufig dem Bruchwerthe $\frac{1}{9}$ gleichgesetzt werden müsste.

Die erste Näherung von p ist im § 35 in der folgenden Form aufgestellt worden:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = 1 - \frac{7\lambda^2}{3} - 2\,\tau_0\,\frac{p}{r}\cos v + \lambda^2\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\frac{p}{r} - \frac{21}{2}\lambda e e_{,} \sin v \sin v_{,}$$

$$- \lambda^2\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\left(2\,(1 + 1{,}5\,8\,\alpha + 1{,}9\,\alpha^2)\left(\frac{r}{p}\right)^2\cos 2\,w + \frac{9}{8}\,(1 + 1{,}4\,\alpha)\left(\frac{r}{p}\right)^3 e\cos(2\,w + v)\right)$$

$$- \frac{15\,\lambda^2}{2\alpha}\,(1 + 1{,}8\,5\,\alpha + 2{,}3\,\alpha^2)\,\frac{p_{,}}{r_{,}}\,\frac{p}{r}\,e\cos(2\,w - v) + \frac{15}{8}\,\frac{\lambda}{f\,m}\,\frac{p_0}{p_{,}}\cos w\,.$$

Indem man von der ungestörten elliptischen Form der Mondbahn ausgeht, setzt man $\frac{p_0}{r} = 1 + e\cos v$. Wenn nun $e = 0$ sein soll, so behält man $\frac{p}{r} = 1$, und es versteht sich, dass unter dieser Annahme das aus der Gleichung der Bahn weggestrichene Glied in dem nun veränderlich gedachten Parameter p einen Ersatz finden muss. Indem man alle von der Störung herrührenden Glieder der Gleichung 18. vernachlässiget, behält man $\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = 1 - 2\,\tau_0\cos v$, oder auch $\frac{p_0}{p} = 1 + \tau_0\cos v$. Die Gleichung der Bahn $\frac{p}{r} = 1$ geht dann über in $\frac{p_0}{r} = 1 + \tau_0\cos v$; und es ist hieraus ersichtlich, dass man neben $e = 0$ in der That $\tau_0 = \frac{1}{18}$ setzen muss, um die anfängliche Gleichung der Bahn, welche als ungestörte Ellipse vorausgesetzt worden ist, wieder zu erhalten. Im Allgemeinen kommt derjenige Werth, um welchen die Excentricität kleiner gemacht wird, zu der Beständigen τ_0 hinzu, damit die Summe $e + \tau_0$ stets einen und denselben Zahlenwerth ausdrücke.

Einen Augenblick könnte man versucht sein zu glauben, dass die Annahme $e = 0$ der Theorie förderlich sei, weil sich die Integration der Störungsglieder, welche in dem dritten Abschnitte ausgeführt worden ist, für diesen Fall sehr vereinfacht. Man würde dann aber ausser Acht lassen, dass für eben diesen Fall $e = 0$ die Elemente τ und σ wegen der mit τ_0 multiplicirten Glieder sehr beträchtlich

ausfallen, und dass in Folge dessen jene Vereinfachung, welche der Integration der Störungsglieder selbst zu Gute kommt, andererseits durch die höhere Ordnung der Störungsglieder aufgewogen werden muss. In Wirklichkeit wird die Analysis nicht gefördert, wenn man in der Theorie des Mondes von der Kreisform der Mondbahn ausgeht. Es ist vielmehr gerade die elliptische Form der Bahn, welcher man die Möglichkeit verdankt, dass viele Glieder des Integrals in einen einzigen Ausdruck zusammengefasst werden. Wollte man in dem auf die elliptische Form der Bahn gegründeten Integrale der Störungsgleichung den Leitstrahl r nach Potenzen von e entwickeln, so würde diese Entwicklung genau diejenige Form des Integrals liefern, welche aus der Annahme $e = 0$ nur durch das Heranziehen von Störungsgliedern einer höheren Ordnung erzielt werden könnte.

Durch die Annahme $e = 0$ wird jene Grösse, welche unter dem Namen der Gleichung des Mittelpunktes bekannt ist, in die Störungstheorie hinübergezogen. Man hat es dann mit demjenigen Probleme zu thun, welches schon von den alten Griechen, wenn auch nur auf dem Wege der Empirie, nicht ohne dankenswerthe Erfolge zu lösen versucht worden ist.

Die erste Näherung von ω hat im § 36 die folgende Form erhalten:

$$\omega - \omega_0 = \tau_0\left(\frac{p}{r} + 1\right)\sin v + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^3 \frac{r}{p}\, e \sin v + \frac{3}{4}\lambda^2 t$$
$$- 3\lambda\left(1 + \frac{7}{2} e \cos v\right) e_i \sin v_i + \frac{3\lambda}{4}\left(\frac{25}{4} e^2 \sin(2w - 2v) - \sin^2 i \sin 2u_i\right)$$
$$+ \lambda^2\left(\frac{11}{8}(1 + 1{,}79\,\alpha + 2{,}3\,\alpha^2) - \frac{15}{8}\frac{e^2}{\alpha}\right)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w + \frac{3\lambda^2}{4}(1 + 1{,}4\,\alpha)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^3 e \sin(2w + v)$$
$$+ \frac{15\lambda^2}{2\alpha}(1 + 2{,}37\,\alpha + 3{,}7\,\alpha^2)\frac{p_i}{r_i}\frac{p}{r}\, e \sin(2w - v) - \frac{15}{8}\frac{\lambda}{fm}\frac{p_0}{p_i}\sin w.$$

Nimmt man $\tau_0 = 0$, so bleibt in der ersten Zeile dieser Gleichung neben dem der Zeit proportionalen Gliede nur ein weiteres Glied übrig. Von denjenigen Gliedern abgesehen, welche Funktion von e_i allein sind, finden sich im übrigen neben der Variation und der Evection des Mondes noch drei weitere Glieder vor. Das grösste von diesen ist $-\frac{21}{2}\lambda e e_i \cos v \sin v_i$. Die Variation des Mondes kann beiläufig dem Bruchwerthe $\frac{1}{90}$, die Evection dem Bruchwerthe $\frac{1}{15}$ gleichgesetzt werden. Das soeben erwähnte Glied ist nur $\frac{1}{30}$ der Evection, und alle übrigen ausserdem noch aufgezeichneten Glieder machen höchstens $\frac{1}{70}$ der Evection aus.

In der obigen Gleichung 18. können ausser den beiden mit $\cos 2w$ und $\cos(2w - v)$ multiplicirten Gliedern, deren Coefficienten beziehungsweise den Coefficienten der Variation und der Evection des Mondes ungefähr gleichwerthig sind, noch fünf weitere Glieder unterschieden werden. Von diesen ist das erste $-\frac{4}{3}\lambda^2$ fast eben so beträchtlich wie die beiden vorher erwähnten. Setzt man wieder $\tau_0 = 0$, so sind alle übrigen Glieder der Gleichung 18. weit kleiner als $\frac{4}{3}\lambda^2$. Vom Zeichen selbstverständlich abgesehen ist das Glied $-\frac{21}{2}\lambda e e_i \sin v \sin v_i$ beiläufig $\frac{1}{30}$ der Evection; die drei andern sind $\frac{1}{60}$ oder $\frac{1}{70}$ der Evection.

Will man zunächst nur die besonders hervorragenden Glieder der beiden Elemente p und ω berücksichtigen, so kann man sich anstatt der Gleichungen 18. und 19. der beiden folgenden Gleichungen bedienen:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = -2\left(b + c\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w + k\,\frac{p_\prime}{r_\prime}\,\frac{p}{r}\cos(2w - v) + \varphi\right)$$

$$\omega - \omega_0 = \qquad g\left(\frac{p_\prime}{r_\prime}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin 2w + h\,\frac{p_\prime}{r_\prime}\,\frac{p}{r}\sin(2w - v) + \chi\,.$$

Man kann sich denken, φ und χ seien zwei neue Elemente, welche die Stelle von p und ω einnehmen sollen. Die beständigen Coefficienten sind aus den ersten Näherungen bekannt. Man hat nämlich:

$$b = \frac{2}{3}\lambda^2\,, \qquad c = \lambda^2(1 + 1{,}58\,\alpha + 1{,}9\,\alpha^2) \qquad k = \frac{15\lambda^2}{4\alpha}(1 + 1{,}85\,\alpha + 2{,}8\,\alpha^2)\,e\,,$$

$$g = \frac{11}{8}\lambda^2(1 + 1{,}79\,\alpha + 2{,}3\,\alpha^2) - \frac{15\lambda^2}{8\alpha}e^2, \qquad h = \frac{15\lambda^2}{2\alpha}(1 + 2{,}37\,\alpha + 3{,}7\,\alpha^2)\,e.$$

Nachdem man die Annahme $\tau_0 = 0$ gemacht hat, ist man genöthigt, die Excentricität als Integrationsbeständige festzuhalten. Es versteht sich, dass der Zahlenwerth von e in dieser Eigenschaft als Integrationsbeständige erst dann aus den vollständigen Integralen der Störungsgleichungen hergeleitet werden kann, nachdem man dieselben als Function der unbestimmten Grösse e aufgestellt hat. Man weiss aber, dass die Integrale der Störungsgleichungen verwickelte Functionen von e sind, während sich das Vorkommen der Beständigen τ_0 auf einige wenige Potenzen beschränken würde, vorausgesetzt, dass dieselbe hinreichend klein gedacht werden dürfte. Es ist hieraus zu ersehen, dass es denn doch wohl einen Vorzug hätte, anstatt der Excentricität e jene andere Beständige τ_0 als Integrationsbeständige zu gebrauchen. Es käme nur darauf an, dass der an die Stelle von e zu setzende Zahlenwerth demjenigen einigermaassen nahe kommt, welcher der Annahme $\tau_0 = 0$ entspricht. Nicht allein, dass die numerische Berechnung der Integrationsbeständigen τ_0 leichter zu bewerkstelligen ist als die von e, es gestalten sich auch die Integrale der Störungsgleichungen wesentlich einfacher, wenn man an die Stelle von e einen Zahlenwerth setzen darf.

Auf die aus dem zuletzt erwähnten Umstande hervorgehenden Vereinfachungen der Integrale hinzuweisen, hat sich schon im § 15 eine Gelegenheit gefunden. Es muss noch hinzugefügt werden, dass durch jene Anordnung, wonach τ_0 eine noch unbestimmte, aber von der Null wenig verschiedene Grösse sein soll, die Verhältnisse zwischen den Zahlenwerthen der einzelnen Glieder in den Elementen p und ω, welche oben für den Fall $\tau_0 = 0$ angegeben worden sind, keine erhebliche Aenderung erleiden.

§ 38. Einige Correctionen der ersten Näherungen, und die Störungsglieder der zweiten Ordnung im Allgemeinen.

Bei der Aufstellung der in den §§ 35 und 36 gegebenen Näherungen war ich bemüht, alle diejenigen Glieder des Integrals festzuhalten, welche beträchtlich grösser sind als eine Bogenminute. Bei der Integration der Gleichungen II. und III. hat sich indessen der Erreichung dieses Zieles eine Schwierigkeit entgegengestellt. Während nämlich in den übrigen Störungsgleichungen, so lange man sich auf die angegebene Genauigkeit beschränken will, die gestörten Elemente als Beständige angesehen werden dürfen, ist dies hier nicht zulässig. Denn in den Gleichungen II. und III. finden sich unter den durch die Substitution der gestörten Elemente entstehenden Gliedern auch solche, welche Function von v, allein sind, und deren Integrale aus diesem Grunde beträchtlich grösser als eine Bogenminute ausfallen.

Indem ich mir nun die weitere Aufgabe stelle, den ersten Näherungen in diesem Sinne eine Correction beizufügen, darf ich mich zum Behufe der Substitution der gestörten Elemente auf die im § 37 vorgeschlagenen Transformationen beschränken. Auch die Störungsgleichung I. ist in diese Untersuchung hineingezogen, insofern als jene Veränderliche $q_,$, welche durch die genannte Gleichung bestimmt ist, auf die vorerwähnten Glieder der Störungsgleichungen II. und III. einen Einfluss hat. Abgesehen davon, dass nun die Elemente p und ω in diesen drei Störungsgleichungen als Veränderliche angesehen werden sollen, mögen alle übrigen Vernachlässigungen statt finden, welche im Obigen unter der Annahme, dass die Elemente p und ω beständig seien, Berechtigung haben. Indem ich mich der Abkürzungen:

$$\beta = c\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w + k\,\frac{p_,}{r_,}\,\frac{p}{r}\cos(2w - v)$$

$$\gamma = g\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w + h\,\frac{p_,}{r_,}\,\frac{p}{r}\sin(2w - v)$$

bediene, schreiben sich die im § 37 vorgeschlagenen Transformationen in der einfachen Form:

22. $$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = -2(b + \beta + \varphi)$$

23. $$\omega - \omega_0 = \gamma + \chi\,.$$

Die Störungsgleichung I. ist im § 35 geschrieben worden:

$$q_,' = 3\lambda^3 p^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\sin 2w - \frac{1}{2}\sin^2 i \sin 2u_,\right) - \frac{3}{2}\lambda^3 p_0^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^4\left(\frac{r}{p}\right)^2 e_, \sin v_,\,.$$

Setzt man nun $\frac{p^2}{p_0^2} = 1 - 2(b + \beta)$ und $\omega = \omega_0 + \gamma$, so geht diese Gleichung über in:

$$q_,' = 3\lambda^3 p_0^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left((1 - 2b)\sin 2w_0 - \frac{1}{2}\sin^2 i \sin 2u_,\right) - \frac{3}{2}\lambda^3 p_0^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^4\left(\frac{r}{p}\right)^2 e_, \sin v_,\,.$$
$$- 6\lambda^3 p_0^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2(\beta \sin 2w_0 - \gamma \cos 2w_0)\,.$$

In den obigen Werthen β und γ darf man zum Behufe der Substitution in diese Gleichung w mit w_0 vertauschen. Die zweite Zeile geht dann über in:

$$-3\lambda^3 p_0^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\frac{r}{p}\left((c - g)\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^3 \sin 4w_0 + (k + h)\sin v + (k - h)\sin(4w_0 - v)\right).$$

Nur diejenigen Glieder von $q_,$, in welchen der Bogen v die Einheit zum Coefficienten hat, führen bei der Integration der Gleichungen II. und III. auf einen kleinen Nenner. Wenn es sich also um die oben gedachte Vervollständigung des Elementes $q_,$ handelt, so braucht man nur auf das vorletzte Glied der vorstehenden Entwickelung Rücksicht zu nehmen. Das Integral desselben lässt sich in der folgenden Form anschreiben:

24. $$\delta q_, = 3\lambda^3 p_0^2(k + h)\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\frac{r}{p}\cos v\,.$$

Die Störungsgleichungen II. und III. sind:

$$-\tau' = \frac{r}{p}\sin v\left(\Omega - r_{,}\frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P\right)$$

$$\sigma' = \frac{r}{p}\cos v\left(\Omega - r_{,}\frac{d\Omega}{dr_{,}} - q_{,} + P\right) + \frac{3}{2}\,\frac{a\,e}{1-e^2}\,,$$

worin, vergl. § 9, abkürzend gesetzt worden ist:

$$P = \frac{1}{2}\frac{p}{r}\left(p^2 + \frac{2\,p_0^3}{p} - 3\,p_0^2\right) + \frac{1}{2}\frac{p}{r}\,p_0^2\left(3\,(b+\beta)^2 + 5\,(b+\beta)^2 + \cdots\right)$$

Man gelangt ferner zu der Entwicklung:

$$\Omega - r_{,}\frac{d\Omega}{dr_{,}} + P = \lambda^2 p^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(1 + 3\cos 2w + \frac{15}{8}\,\frac{1}{f_m}\,\frac{r}{r_{,}}\cos w\right) + P$$

$$= \lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left((1-2b)(1+3\cos 2w_0) + \frac{15}{8}\,\frac{1}{f_m}\,\frac{r}{r_{,}}\cos w_0\right)$$

$$- 2\lambda^2 p_0^2 \left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left(\beta\,(1+3\cos 2w_0) + 3\gamma\sin 2w_0\right) + \frac{3}{2}\,p_0^2\,\frac{p}{r}\,(b+\beta)^2.$$

Mit Rücksicht auf die obigen Werthe β und γ geht die zweite Zeile dieser Gleichung über in:

$$-2\lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^4\frac{r}{p}\left(\left[c\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos 2w_0 + k\cos(2w_0 - v)\right](1+3\cos 2w_0)\right.$$

$$\left. + 3\left[q\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^3\sin 2w_0 + h\sin(2w_0 - v)\right]\sin 2w_0\right)$$

$$+ \frac{3}{2}\,p_0^2\frac{p}{r}\left(b + c\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\cos 2w_0 + k\,\frac{p_{,}}{r_{,}}\,\frac{p}{r}\cos(2w_0 - v)\right)^2.$$

$$= -\lambda^2 p_0^2\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^4\frac{r}{p}\left(2c\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^3\cos 2w_0 + 2k\cos(2w_0 - v)\right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\left[c + g + (c-g)\cos 4w_0\right] + 3\left[(k+h)\cos v + (k-h)\cos(4w_0 - v)\right]\right)$$

$$+ \frac{3}{4}p_0^2\left(2b^2\frac{p}{r} + 4bc\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^3\frac{r}{p}\cos 2w_0 + c^2\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^6\left(\frac{r}{p}\right)^3(1+\cos 4w_0)\right.$$

$$\left. + 4bk\,\frac{p_{,}}{r_{,}}\left(\frac{p}{r}\right)^2\cos(2w_0 - v) + 2ck\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^4\left(\cos v + \cos(4w_0 - v)\right) + k^2\left(\frac{p_{,}}{r_{,}}\right)^2\left(\frac{p}{r}\right)^3\left[1 + \cos(4w_0 - 2v)\right]\right).$$

Indem man dies in die Störungsgleichungen II. und III. einsetzt, bildet man die Derivirte derjenigen Glieder, welche als Correction der ersten Näherungen von σ und τ angesehen werden können. Man sieht, dass zu den in die erste Näherung schon aufgenommenen Gliedern jetzt noch neue Formen hinzukommen. Wenn man aber diejenigen Glieder der Correction in's Auge fasst, welche aus dem oben angegebenen Grunde am meisten in's Gewicht fallen, so überzeugt man sich, dass es sich um nur zwei verschiedene Formen handelt, welche beide unter den Gliedern der ersten Näherung schon ihren Stellvertreter haben. Im Allgemeinen sind die betreffenden Glieder der Entwicklung von $\Omega + r_{,}\frac{d\Omega}{dr_{,}} + P$ daran kenntlich, dass in einem sinus oder in einem cosinus der Winkel v die Einheit zum Coefficienten hat. Es sind also in erster Linie die Winkel v und w_0, und ausserdem die zusammengesetzten Winkel $w_0 - 2v$, $2w_0 - v$, $2w_0 - 3v$, $3w_0 - 2v$ u. s. w. zu berücksichtigen. Von allen diesen kommen jedoch in der vorliegenden Entwicklung nur die beiden v und $2w_0 - v$ vor. Das dem ersteren Winkel entsprechende Glied der Correction hat einen Einfluss auf den beständigen Coefficienten in dem der Zeit

proportionalen Gliede des Perigäums; während das dem andern Winkel entsprechende Glied auf den beständigen Coefficienten der Evection einwirkt. Um die verlangten Correctionen herzustellen, darf man sich der einfacheren Gleichung bedienen:

25. $$\delta\left(\Omega - r_,\frac{d\Omega}{dr_,} + P\right) = 2\,p_0^2 k\left(\frac{3}{2}\,b - \lambda^2\right)\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^4 \cos(2\,g_0 - \varepsilon) - 3\,p_0^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^4\left((k+h)\lambda^2 - \frac{1}{2}\,c\,k\right)\cos\varepsilon\,.$$

Wenn man bei der Anwendung der Transformationen 22. und 23. von den schon bekannten Werthen der Coefficienten $b\ c\ k\ g\ h$ ausgehen wollte, so müsste man, sobald die Correctionen aufgefunden sind, an die Stelle jener Coefficienten die verbesserten treten lassen, und dieselbe Rechnung alsdann wiederholen, um nach und nach zu den genauen Coefficienten zu gelangen. Diese mühsamere Herleitung der Correction kann aber vermieden werden, weil, wie schon bemerkt, die Correction nur eine Aenderung der beständigen Coefficienten zur Folge hat. Man denke sich zum Behufe der Transformation den Coefficienten $b\ c\ k\ g\ h$ von vornherein die genauen Werthe beigelegt. Nachdem man dieselben in der Eigenschaft unbestimmter Beständigen in die Störungsgleichungen eingeführt hat, kann der Integration selbst aus dieser Voraussetzung keine Schwierigkeit erwachsen. Nach vollzogener Integration kann man leicht algebraische Gleichungen anschreiben, von deren Auflösung die Bestimmung der genauen Coefficienten abhängig ist.

Die Correction des Coefficienten in dem der Zeit proportionalen Gliede des Perigäums ist auffallend gross. Um zu derselben zu gelangen, hat man mit Rücksicht auf die Gleichung IV. des § 14 die Correction jener beständigen Glieder, welche der Störungsgleichung III. entnommen, im § 13 in ihrer Gesammtheit der Grösse $\frac{3}{2}\alpha e$ gleichgesetzt worden sind, durch $p_0^2 e$ zu theilen. Indem man neben der Gleichung 25. auch die Correction von $q_,$ unter 24. berücksichtigt, findet man die folgende Correction:

$$\delta\left(\frac{3}{2}\,\alpha\,e\right) = \frac{3}{2}\,p_0^2\left(\lambda^2(1+\lambda)(k+h) - \frac{1}{2}\,c\,k\right).$$

Begnügt man sich vorerst mit den in den §§ 35 und 36 aufgefundenen genäherten Werthen der Coefficienten:

$$c = \lambda^2(1 + 1{,}58\,\alpha + 1{,}9\,\alpha^2),$$

$$k = \frac{15\lambda^2}{4\alpha}(1 + 1{,}85\,\alpha + 2{,}3\,\alpha^2)\,e\,,$$

$$h = \frac{15\lambda^2}{2\alpha}(1 + 2{,}37\,\alpha + 3{,}7\,\alpha^2)\,e\,,$$

so geht die obige Gleichung, da man im Innern der Klammern $\lambda = \frac{\alpha}{2}$ setzen darf, über in:

$$\delta\left(\frac{3}{2}\,\alpha\right) = \left(\frac{15}{4}\right)^2\frac{\lambda^4}{\alpha}\,p_0^2(1 + 2{,}55\,\alpha + 3{,}8\,\alpha^2)\,.$$

Man theile dies noch durch p_0^2, und man hat die verlangte Correction des Perigäums. Indem man dieselbe mit dem schon oben aufgefundenen Bestandtheile des in Rede stehenden Coefficienten verbindet, erhält man den genaueren Werth:

26. $$\pi = \frac{3}{4}\,\lambda^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2\frac{\lambda^4}{\alpha}(1 + 2{,}55\,\alpha + 3{,}8\,\alpha^2)\,.$$

Es ist $\alpha = 2\,(\lambda - \pi)$. Nimmt man $\pi = \frac{\lambda}{9}$ und $\lambda = \frac{3}{40}$, so ist $\alpha = \frac{2}{15}$. Man findet dann bei-

läufig $\left(\frac{15}{4}\right)^2 \frac{\lambda^2}{\alpha}(1+2,55\,\alpha+3,8\,\alpha^2)=\frac{6}{7}$; und man sieht nun, dass der aus den Störungsgliedern der zweiten Ordnung hervorgehende Bestandtheil jenes Coefficienten noch Weniges mehr ausmacht als der schon oben erhaltene.

Eine gleichfalls sehr beträchtliche Correction erleidet der Coefficient b der im vorigen Paragraphen aufgestellten Näherung des Parameters. Es ist dort $b=\frac{2}{3}\lambda^2$ gesetzt worden. Den Resultaten des § 35 zufolge ist aber genauer $b=\frac{\alpha}{p_0^2}-\frac{\lambda^2}{2}$, und desshalb $\delta b=\frac{\delta\,\alpha}{p_0^2}$. Indem man auf diesem Wege die Correction von b aus der von α herleitet, findet man den vollständigeren Werth:

27. $$b=\frac{2}{3}\lambda^2+\frac{75}{8}\frac{\lambda^4}{\alpha}(1+2,55\,\alpha+3,8\,\alpha^2)\,,$$

worin der neu hinzugefügte Bestandtheil beiläufig den Bruchwerth $\frac{4}{7}\lambda^2$ ausdrückt.

Weniger beträchtlich sind die Correctionen, welche die Coefficienten k und h erleiden. Indem man auf die Gleichung 25. zurückkommt, findet man die Correctionen der Derivirten τ' und σ'. Es ist:

$$\delta\,\tau'=p_0^2\,k\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^4\sin(2\,w_0-2\,v)\,,$$

$$\delta\,\sigma'=p_0^2\,k\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^4\cos(2\,w_0-2\,v).$$

Durch die Integration erhält man alsdann die Correctionen:

$$\delta\,\tau=p_0^2\frac{k}{\alpha}\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^2\cos(2\,w_0-2\,v),$$

$$-\,\delta\,\sigma=p_0^2\frac{k}{\alpha}\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^2\sin(2\,w_0-2\,v).$$

Es ergeben sich daraus die weiteren Correctionen:

$$\delta\,(\tau\cos v+\sigma\sin v)=p_0^2\frac{k}{\alpha}\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^2\cos(2\,w_0-v)\,,$$

$$\delta\,(\tau\sin v-\sigma\cos v)=p_0^2\frac{k}{\alpha}\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right)\left(\frac{p_i}{r_i}\right)^2\sin(2\,w_0-v)\,.$$

Indem man nun rechts den veränderlichen Factor streicht, und ausserdem noch durch p_0^2 theilt, erhält man die Correctionen der Coefficienten k und h. Die vervollständigten Coefficienten sind:

28. $$k=\frac{15\lambda^2}{4\,\alpha}(1+1,85\,\alpha+2,3\,\alpha^2)\,e-\frac{k}{\alpha}\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right),$$

29. $$h=\frac{15\lambda^2}{2\,\alpha}(1+2,37\,\alpha+3,7\,\alpha^2)\,e-\frac{k}{\alpha}\left(\frac{3}{2}b-\lambda^2\right).$$

Da beiläufig $\frac{3}{2}b-\lambda^2=\frac{6}{7}\lambda^2$ ist, also einen positiven Werth darstellt, so sieht man, dass die

Correctionen der Coefficienten k und h negativ ausfallen. Setzt man die vorliegenden genaueren Werthe k und h in die Gleichung:

$$\delta b = \left(\lambda^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)(k + h) - \frac{1}{2} c k\right) \frac{1}{e}$$

ein, so findet man den vollständigeren Werth:

30. $$\frac{3}{2} b - \lambda^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \frac{\lambda^4}{\alpha} (1 + 2{,}55\,\alpha + 3{,}8\,\alpha^2) - \frac{\lambda^2}{e}\left(\frac{15}{4} + \alpha\right) \frac{k}{\alpha}\left(\frac{3}{2} b - \lambda^2\right).$$

Die Correctionen der drei Coefficienten k, h, b haben alle den Factor $k\left(\frac{3}{2} b - \lambda^2\right)$. Multiplicirt man die Gleichungen 28. und 30. mit einander, so gelangt man zu einer neuen Gleichung, in welcher das Product $k\left(\frac{3}{2} b - \lambda^2\right)$ als die einzige Unbekannte vorkommt. Die genaue Bestimmung derselben ist demnach von der Auflösung einer quadratischen Gleichung abhängig.

Wenn man beabsichtigt, die vollständige Integration der Störungsgleichungen auszuführen, so verlangt die Methode der successiven Substitution, dass man die obigen Transformationen 22. und 23. noch weiter verfolge. Es ist:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = -2(b + \beta + \varphi)$$

$$\omega - \omega_0 = \gamma + \chi.$$

Die Transformation von ω in dem ersten Gliede der Störungsfunction betrifft die Function $\cos 2w$, und führt zu zwei Gliedern, welche beziehungsweise mit $\sin 2\gamma$ und $\cos 2\gamma$ multiplicirt sind. Dieselben müssen zum Behufe der Substitution des oben aufgezeichneten Werthes γ nach Potenzen von γ entwickelt werden. Da das grösste der in γ vorkommenden Glieder, die Evection etwa den Bruchwerth $\frac{1}{45}$ hat, so ist es wohl gestattet, in diesen Entwicklungen die Potenz γ^4 und die höheren Potenzen von γ zu vernachlässigen. Es ist also hinreichend, $\sin 2\gamma = 2\gamma - \frac{4}{3}\gamma^3$, und $\cos 2\gamma = 1 - 2\gamma^2$ zu schreiben. In dem zweiten und dritten Gliede der Störungsfunktion bedarf es selbstverständlich einer nicht einmal so weit ausgeführten Entwicklung der trigonometrischen Functionen von γ.

Diejenigen Entwicklungen, welche aus der Transformation von p hervorgehen, gestalten sich noch einfacher als die soeben erwähnten. Denn in dem ersten Gliede der Störungsfunction kommt dies Element nur als Faktor p^2 vor, dessen Werth durch die Gleichung 22. unmittelbar gegeben ist. Das zweite Glied der Störungsfunction betreffend kann es als ausreichend betrachtet werden, sich auf die drei ersten Glieder der binom'schen Entwicklung von $\left(\frac{p}{p_0}\right)^3 = (1 - 2b - 2\beta)^{\frac{3}{2}}$ zu beschränken. In dem dritten Gliede der Störungsfunction dürfte man den Factor p^4 als Beständige betrachten.

In dem vorigen Paragraphen ist gezeigt worden, dass die den neuen Elementen φ und χ zugewiesenen Glieder einzeln genommen höchstens $\frac{1}{30}$ der Evection ausmachen. Vorhin hat man die Correction der ersten Näherungen von p und ω aufgestellt, und sich bei dieser Gelegenheit überzeugt, dass die Störungsglieder der zweiten Ordnung in den Coefficienten der vorerwähnten Glieder von φ und χ keine wesentliche Aenderung zur Folge haben. Da nun die Evection beiläufig den Bruchwerth $\frac{1}{45}$ hat, so

können die einzelnen Glieder von φ und χ höchstens den kleinen Bruchwerth $\frac{1}{1300}$ darstellen. Wenn zwar die Elemente φ und χ bei der vollständigen Integration der Störungsgleichungen gleichfalls in Betracht kommen, so wird es doch kaum nöthig sein, in der Entwicklung der Störungsfunction auf die verschiedenen Potenzen dieser Elemente Rücksicht zu nehmen. Im Allgemeinen wird es ausreichend sein, sich auf die ersten Potenzen zu beschränken. In der That wird ein Störungsglied, dessen Verhältniss zu der Evection beiläufig durch den Bruchwerth $\frac{1}{1300^2}$ ausgedrückt ist, in dem Integrale unmerklich sein. In diesem Sinne dürfen also alle Störungsglieder als lineare Function der neuen Elemente φ und χ angesehen werden. Ob sich einzelne mit der zweiten Potenz dieser Elemente multiplicirte Glieder finden, welche doch nicht unberücksichtigt bleiben dürfen, weil sie gerade Function von r_1 allein sind, dies zu entscheiden kann füglich eingehenderen Erörterungen überlassen bleiben.

Diejenigen Glieder der Elemente p und ω, welche Function von r_1 allein sind, haben in den Transformationen 22. und 23. keine Aufnahme gefunden, weil die entsprechenden Correctionen der ersten Näherungen bekanntlich nach der Methode der variirten Näherung aufgestellt werden sollen. Ein sehr beträchtliches Glied dieser Art in dem Elemente ω ist die jährliche Gleichung. Man findet aber leicht, dass die durch die Methode der variirten Näherung zu Stande gebrachte Correction noch kleiner ausfällt als jener Bruchwerth $\frac{1}{1300}$, wiewohl die jährliche Gleichung mehr als $\frac{1}{7}$ der Evection ausmacht. Die Genauigkeit der Integrale, welche auf Grund der im Vorstehenden erörterten Transformationen 22. und 23. erzielt wird, erleidet also durch den Umstand, dass die soeben erwähnten Glieder der ersten Näherungen in jene Transformationen nicht aufgenommen worden sind, keine Beeinträchtigung.

Schliesslich nehme ich Veranlassung, noch einmal jener Eigenthümlichkeit der Störungsgleichungen zu gedenken, wonach deren Integrale durch Quadraturen ausgedrückt werden sollen, welche unter dem Integralzeichen die unbekannten Veränderlichen selbst enthalten. Es ist in dieser Eigenthümlichkeit die vermeintliche Schwäche der Methode ausgesprochen, welche derselben vorzuhalten die Analysten vielleicht Berechtigung zu haben glauben. Man macht sich aber keiner Uebereilung schuldig, wenn man von der Voraussetzung ausgeht, dass es eine andere Integralform gar nicht gibt, welche sich an die Stelle setzen liesse. Dies allein schon ist ein Grund, sich mit dieser Integrationsmethode zu befreunden. In Wirklichkeit ist es übrigens nur deren Ungewohntheit, welche befremdlich erscheint. Die bisherige Meinung, dass die Vollkommenheit der Integralform in dem ausschliesslichen Gebrauche der reinen Quadratur zu suchen sei, ist wohl nur ein Vorurtheil. Denn die in dem Vorstehenden befolgte Integrationsmethode ist ganz geeignet, allen Forderungen zu genügen, welche überhaupt an eine solche gestellt werden können. Dieselbe liefert die Coordinatenwerthe für jeden beliebigen Zeitpunkt, und man hat sich auch überzeugt, dass es zur Erlangung einer noch so grossen Genauigkeit durchaus nicht unerlässlich ist, die unbekannte Veränderliche unter dem Integralzeichen entfernt zu haben.

§ 39. Ueber die Genauigkeit der Beständigen des Problems in der Theorie des Mondes.

In der Störungstheorie darf auch die Frage nicht unerörtert bleiben, welche Zahlenwerthe an die Stelle der Beständigen des Problems gesetzt werden müssen, damit die verlangte Genauigkeit in den zu berechnenden Oertern erreicht werden könne. Es ist von vorn herein einleuchtend, dass man diesen

Zahlenwerthen diejenige Genauigkeit zu geben hat, zu welcher man durch die Vergleichung der beobachteten Oerter mit den im § 30 aufgestellten Coordinatenwerthen überhaupt gelangen kann. Es zeigt sich aber, dass bei der Berechnung dieser Zahlenwerthe verschiedene Rücksichten maassgebend sind, je nachdem es sich um diejenigen Beständigen handelt, welche als Coefficienten der der Zeit proportionalen Glieder auftreten, oder um diejenigen, welche nur in den periodischen Gliedern vorkommen. Zu den ersteren zählt vor Allem die Beständige λ, durch welche das Verhältniss der mittleren Bewegung der Sonne zu der des Mondes ausgedrückt ist. In den Elementen ω und ϑ kommen zwei weitere mit t multiplicirte Glieder vor, deren Coefficienten beziehungsweise mit π und ν bezeichnet worden sind. Alle übrigen Beständigen des Problems kommen nur in den periodischen Gliedern der Integrale vor.

Bei der Bestimmung derjenigen Beständigen, welche nur in periodischen Gliedern vorkommen, ist der Zeitpunkt nicht gleichgiltig, in welchem der zu benutzende Beobachtungswerth gefunden ist. Eine solche Beständige ist entweder der trigonometrischen Funktion als Factor beigegeben, oder sie ist ein Bestandtheil des veränderlichen Winkels selbst, dessen trigonometrische Funktion vorliegt. In dem ersteren Falle ist der dem berechneten Werthe der Beständigen anhaftende Fehler am ehesten merklich, wenn die trigonometrische Funktion, mit welcher die Beständige multiplicirt ist, ihren grössten Werth erlangt hat. In dem anderen Falle macht sich der etwaige Fehler hauptsächlich dann bemerklich, wenn der sinus oder der cosinus des veränderlichen Winkels, zu welchem die Beständige addirt ist, der Null nahe liegt.

Was ferner den Zeitraum betrifft, über welchen die einzelnen Beobachtungen vertheilt sind, mit deren Hilfe die hier besprochenen Beständigen bestimmt werden sollen, so braucht derselbe nicht grösser zu sein als die Periode derjenigen trigonometrischen Glieder, welche mit Rücksicht auf ihren Zahlwerth bei der Bestimmung der gesuchten Beständigen die maassgebenden sind. Wollte man andere Beobachtungswerthe an deren Stelle setzen, welche sich über einen noch so grossen Zeitraum erstrecken, so könnte dies an den Zahlenwerthen dieser Beständigen Nichts ändern. Unter den für die Berechnung maassgebenden periodischen Gliedern finden sich in der Theorie des Mondes übrigens nur solche, deren Perioden mit dem Mond- und dem Sonnenumlauf zusammenfallen. Es folgt daraus, dass die bei der Berechnung dieser Beständigen zu verwendenden Beobachtungen auf den Zeitraum eines Sonnenumlaufs beschränkt sein dürfen.

Es ist leicht erklärlich, dass nicht alle diese Beständigen eine gleich grosse Genauigkeit zulassen. Man denke sich in den Coordinatenwerthen des § 30 die veränderlichen Elemente und zugleich die Veränderlichen v und r, als Function von t eingesetzt. Es lässt sich dann leicht die Grenze der Genauigkeit beurtheilen, welche für jede einzelne Beständige erreicht werden kann. Für den Fall, dass die Beständige in dem Coordinatenwerthe nicht selbst noch einen Factor neben sich hat, welcher von der Einheit merklich verschieden ist, versteht es sich, dass die Genauigkeit des gesuchten Zahlenwerthes ebenso gross gefunden wird wie die des gegebenen Beobachtungswerthes. Der Grund davon, dass man öfters mit einer weit weniger grossen Genauigkeit vorlieb nehmen muss, liegt darin, dass sich die Anwesenheit der Beständigen auf solche Glieder des Integrals beschränkt, welche jederzeit nur einen kleinen Bruchtheil der Gesammtstörung ausmachen.

Die Gleichungen zur Bestimmung von Länge und Breite des Mondes und der Sonne enthalten die beständigen Bestandtheile p_0 und $p_\prime$ der beiden Parameter nicht anders als in dem Verhältnisse $\frac{p_0}{p_\prime}$, und können in Folge dessen die Beobachtungswerthe für den Ort des Mondes und der Sonne zwar den Werth dieses Verhältnisses, nicht aber den Werth p_0 liefern. Um die letztere Beständige zu erhalten, ist man genöthigt, dieselbe mit der Länge ϱ des Erdhalbmessers zu vergleichen, welcher aus andern Messungen als bekannt vorausgesetzt werden darf. Den Werth des Verhältnisses $\frac{\varrho}{p_0}$ findet man aus der Mondparall-

axe, und unter der Voraussetzung, dass die beobachtete Parallaxe auf 0,1 Bogensekunde verbürgt sei, darf dies auch als die Fehlergrenze für den Werth des Verhältnisses $\frac{\varrho}{p_0}$ angesehen werden. Die Genauigkeit der Beständigen p_0 selbst ist dann freilich eine weit geringere. Denn es ist das Verhältniss $\frac{\varrho}{p_0}$ beiläufig gleich $\frac{1}{60}$. Wenn in demselben die Genauigkeit 0."1 wirklich erreicht worden ist, so muss dem entsprechend die als erreichbar anzunehmende Fehlergrenze der Beständigen p_0 60 mal so gross gedacht werden, und beträgt dann immer noch 6″.

Mit der Genauigkeit von 0,1 Bogensekunde lässt sich übrigens die Mehrzahl der in dem Problem vorkommenden Integrationsbeständigen ermitteln, unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungswerthe ebenso genau vorliegen. Die Längen des Mondes und der Sonne bestimmen sich aus den Gleichungen 2. und 4. des § 30:

$$\cos B \sin(L - v - \omega) = -\sin^2\frac{i}{2}\sin 2(v + \omega - \vartheta)$$

$$\cos B_, \sin(L_, - v_, - \omega_,) = \frac{r}{r_,}J\,m\cos B\sin(L - v_, - \omega_,).$$

Denkt man sich zum Behufe der Elimination von v und $v_,$ die nachstehenden Gleichungen verwendet:

$$\varepsilon - e\sin\varepsilon = (t - c)(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{worin} \quad \mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\frac{v}{2},$$

$$\text{und} \quad \varepsilon_, - e_,\sin\varepsilon_, = \lambda(t - c_,)(1 - e_,^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad \mathrm{tg}\frac{\varepsilon_,}{2} = \sqrt{\frac{1-e_,}{1+e_,}}\,\mathrm{tg}\frac{v_,}{2},$$

so ergibt sich aus der Gleichung 2. das Einemal der Zahlenwerth der Beständigen c, das Anderemal der Zahlenwerth einer linearen Funktion von ω_0 und c. Ebenso findet man aus der Gleichung 4. die Zahlenwerthe der Beständigen $c_,$ und einer linearen Funktion von $\omega_,$ und $\lambda c_,$. Die Breite des Mondes bestimmt sich aus der Gleichung 1. des § 30:

$$\sin B = \sin i \sin(v + \omega - \vartheta).$$

Eben diese Gleichung lässt sich auch zur Bestimmung der Beständigen i_0 verwenden. Die Genauigkeit dieser fünf Beständigen kann hiernach in der That als auf 0,1 Bogensekunde festgestellt angesehen werden.

Unter denjenigen Beständigen, welche des beigefügten kleinen Factors wegen ein geringeres Maass von Genauigkeit zulassen, sind vor Allem die beiden e und $\lambda e_,$ zu erwähnen. In den Gleichungen 2. und 4. finden sich dieselben, wenn man von den schon oben erwähnten linearen Funktionen von ω_0 und c, $\omega_,$ und $\lambda c_,$ absieht, beziehungsweise mit den Factoren e und $e_,$ verbunden. Ferner gehört hierher die Beständige ϑ_0, deren Werth am schicklichsten aus der Gleichung 1. hergeleitet wird, wo sie mit $\sin i$ multiplicirt ist. Jene Beständige $\frac{1-m}{J\,m}\,\frac{p_0}{p_,} = \varkappa$, mit deren aufsteigenden Potenzen die aufeinander folgenden Glieder der Störungsfunktion multiplicirt sind, hat beiläufig den Bruchwerth $\frac{1}{400}$. In dem Elemente ω findet sich ein zur Berechnung dieser Beständigen vorzugsweise geeignetes Glied, weil in demselben diese Beständige mit dem Factor λ verbunden ist, während sich in allen übrigen Gliedern der ersten Näherung der Factor λ^2 findet. Man wird sich deshalb zur Bestimmung von $\varkappa$ abermals der Gleichung 2. bedienen. In allen diesen Fällen wird die Genauigkeit der zu berechnenden Beständigen nicht sehr auffallend gegen die der vorerwähnten Beständigen beeinträchtigt.

Die Mondmasse und die Sonnenmasse sind zwar keine Integrationsbeständigen; dieselben müssen aber doch zu den Beständigen des Problems gezählt werden, weil sie sich aus der Theorie des Mondes berechnen lassen. Die Gleichung 4. ist zur Berechnung der Mondmasse geeignet. Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht aber der Coefficient $\sqrt{m}\,\frac{p_0}{p_{,}} = \frac{m\,\varkappa}{1-m}$. Die Anwesenheit des kleinen der Mondmasse beigefügten Factors $\varkappa$ beeinträchtigt aber die Genauigkeit des zu erzielenden Resultats in hohem Maasse.

Um auch die Sonnenmasse zu bestimmen, kann man sich der schon in § 8 aufgestellten Gleichung 1.:

$$\lambda^2 = \frac{(1+m)^2}{\sqrt{1+m+m_{,}}}\left(\frac{\sqrt{m_{,}}\,p_0}{\sqrt{m}\,p_{,}}\right)^3.$$

bedienen, welche sich, nachdem man abkürzend $1 + m$ neben $m_{,}$ gestrichen hat, etwas einfacher schreibt:

$$\lambda^2 = \frac{m_{,}}{1+m}\left(\frac{1+m}{1-m}\,\varkappa\right)^3.$$

Man sieht, dass die Genauigkeit der zu berechnenden Sonnenmasse $m_{,}$ wesentlich davon abhängt, mit welcher Genauigkeit die Beständigen $\varkappa$ und m aufgefunden sind. Da die obige Berechnung der Mondmasse m ganz besonders mangelhaft ausfällt, so würde sich die Sonnenmasse aus der Theorie des Mondes mit weit grösserer Genauigkeit berechnen lassen, wenn man ein Mittel hätte, die Mondmasse anderweitig genauer zu bestimmen. Als solches empfiehlt sich bekanntlich die Erscheinung der Nutation, welche übrigens mit dem Probleme der drei Körper selbst in keinem Zusammenhange steht.

Wir haben nun diejenigen Beständigen des Problems betrachtet, welche in den periodischen Gliedern der Integrale vorkommen. Andere Rücksichten sind bei der Berechnung jener drei Beständigen λ, π, ν zu beobachten, welche mit der Zeit multiplicirt sind. Ein etwaiger Fehler in der Bestimmung dieser Beständigen verursacht in dem entsprechenden Gliede des Integrals einen Fehler, welcher mit der Zeit über jede Grenze hinaus anwächst. Die Länge des Zeitraums, über welchen sich die Beobachtungswerthe vertheilen, ist desshalb bei der Berechnung dieser Beständigen nicht gleichgiltig. Man wird sich jedenfalls solcher Beobachtungswerthe bedienen, welche der Zeit nach möglichst weit auseinander liegen. Nachdem man die genannten Beständigen aus derartigen Beobachtungswerthen berechnet hat, ist der wahrscheinliche Fehler selbstverständlich durch einen viel kleineren Bruchwerth ausgedrückt als der jenen andern Beständigen anhaftende Fehler, welche nur in periodischen Gliedern des Integrals vorkommen. Ferner werden die aus den Integralen berechneten Oerter die volle Uebereinstimmung mit den Beobachtungen doch immer nur so lange geben, als sich dieselben auf einen Zeitraum beschränken, welcher nicht noch grösser ist als derjenige, auf welchen die bei der Berechnung der Coefficienten verwendeten Beobachtungen vertheilt sind.

Im § 8 ist eine Gleichung aufgestellt worden, der zufolge die Beständige λ aus andern Beständigen des Problems berechnet werden kann. Auch die Coefficienten π und ν in den der Zeit proportionalen Gliedern der Elemente ω und ϑ dürfen als Funktion der übrigen Beständigen des Problems aufgefasst werden. Diese Funktionen ergeben sich ebenso wie die Integrale der Störungsgleichungen in der Form von unendlichen Reihen. Es liegen also drei Gleichungen vor, mit deren Hilfe die Beständigen λ, π, ν aus den übrigen Beständigen des Problems berechnet werden können. Es wäre aber ein Irrthum zu glauben, dass die im Vorstehenden gegebene Vorschrift, wonach die Zahlenwerthe dieser drei Beständigen unmittelbar aus den Beobachtungen hergeleitet werden sollen, umgangen werden könne. Was die erste

Gleichung betrifft, aus welcher λ bestimmt werden sollte, so hat dieselbe vorhin schon eine andere Verwendung erhalten, da man die Sonnenmasse m, daraus berechnen soll. Aus den beiden andern Gleichungen aber könnte man die Zahlenwerthe der Coefficienten π und ν niemals mit einer hinreichenden Genauigkeit berechnen, wie weit auch die Entwicklung der unendlichen Reihe ausgeführt wäre. Denn die Zahlenwerthe der übrigen Beständigen des Problems betreffend, welche nur in periodischen Gliedern der Integrale vorkommen, ist man darauf angewiesen, mit einer beschränkten Genauigkeit vorlieb zu nehmen. Eine Beschränkung der Genauigkeit würde sich unvermeidlich auf die Zahlenwerthe der Coefficienten π und ν übertragen, sobald man dieselben aus den vorerwähnten Gleichungen berechnen wollte.

Es steht Nichts im Wege, die beiden Coefficienten π und ν als Integrationsbeständige aufzufassen, um alsdann irgend zwei andere Beständige des Problems als Funktion von π und ν und der übrigen Integrationsbeständigen darzustellen. Wollte man jenen beiden andern Gleichungen gleichfalls eine Verwendung geben, so erscheint es wohl angemessen, anstatt π und ν zwei andere Beständige des Problems daraus zu berechnen. Insofern als die in diesen Gleichungen sonst noch vorkommenden Beständigen nur eine beschränkte Genauigkeit aufzuweisen haben, ist es selbstverständlich, dass eben diese Gleichungen auch den beiden zu berechnenden Beständigen immer wieder nur eine beschränkte Genauigkeit geben können. Es ist hiermit aber auch die Grenze gesteckt, bis zu welcher die Entwicklungen von π und ν, als Funktion der übrigen Beständigen gedacht, der Theorie des Mondes einen Dienst leisten können.

Es ist übrigens doch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass eine über die Genauigkeit von 0,1 Bogensecunde hinausgehende Entwicklung der Beständigen π und ν als Funktion der übrigen Beständigen der Theorie des Mondes immer noch werthvolle Anhaltspunkte bietet. Wenn eine derartige Verwendung der Wirklichkeit entspricht, so kann dies nur darauf beruhen, dass alle übrigen Beständigen, welche ausser den zu berechnenden in den Entwicklungen von π und ν vorkommen, mit einem kleinen Factor verbunden sind. Die Beständige λ ist von dieser Anforderung selbstverständlich nicht betroffen, weil deren Genauigkeit gleichfalls über jede Grenze hinaus ausgedehnt werden kann. Jene kleinen Factoren aber, welche nach der Voraussetzung den übrigen Beständigen beigefügt sind, geben das Maass an, in welchem es immerhin einen Zweck hätte, die Entwicklung der Coefficienten π und ν über die oben bezeichnete Grenze von 0,1 Bogensecunde hinaus auszuführen. Doch darf man nicht übersehen, dass eine solche Unternehmung einen verhältnissmässig sehr grossen Aufwand von Rechnung erfordert, da nämlich jene vollständigeren Entwicklungen von π und ν nicht aufgestellt werden können, ohne dass gleichzeitig auch die periodischen Glieder der Integrale in einer grösseren Vollständigkeit entwickelt werden.

Fünfter Abschnitt.

Variation der Focodistanz, und deren Anwendung auf die Theorie des Mondes.

§ 40. Die Differentialgleichungen der rechtwinkeligen Coordinaten unter dem Einflusse der veränderlichen Focodistanz.

Es seien wieder $x_0\ y_0\ z_0\ x_{0,}\ y_{0,}\ z_{0,}$ die Coordinaten der beiden sich störenden Massen m und $m_,$, bezogen auf den Ort des Centralkörpers. Die lineare Transformation, durch welche die kanonische Form der Differentialgleichungen wieder hergestellt wird, ist für die Coordinaten $x_0\ x_{0,}$ in den folgenden Gleichungen ausgesprochen:

$$\sqrt{\frac{m}{1+m}}\, x_0 = x \cos\varepsilon + x_, \sin\varepsilon\,. \qquad \sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}\, x_{0,} = x_, \cos(\mu_0 - \varepsilon) + x \sin(\mu_0 - \varepsilon)\,.$$

In denselben ist μ_0 eine bestimmte Funktion der Massenverhältnisse, und ε bezeichnet eine willkürliche Beständige. Aehnliche Gleichungen hat man zur Transformation der übrigen Coordinaten.

Der linearen Transformation zufolge ist die Gesammtbewegung des gestörten Körpers um den Centralkörper aus zwei verschiedenen Bewegungen zusammengesetzt. Man denkt sich die Bahn desselben als eine bewegliche Ellipse, deren Brennpunkt selbst eine andere Ellipse dieser Art um den Centralkörper beschreibt. Nach den Aufstellungen des § 2 ist der Leitstrahl der von der Masse m beschriebenen Ellipse gleich $\sqrt{\frac{1+m}{m}}\, r \cos\varepsilon$, und der Leitstrahl des zugehörigen Brennpunktes ist ausgedrückt durch $\sqrt{\frac{1+m}{m}}\, r_, \sin\varepsilon$. Nimmt man $\varepsilon = 0$, so fällt der Brennpunkt der von der Masse m beschriebenen Ellipse jederzeit mit dem Ort des Centralkörpers zusammen. Wenn die vorausgehenden Untersuchungen über Störungen durchgehends die Annahme $\varepsilon = 0$ festhalten, so ist man dabei allein von der Absicht geleitet, der Störungsfunktion den möglichst einfachen analytischen Ausdruck zu geben, vgl. § 31. Es kann aber nicht ohne Weiteres angenommen werden, dass einer solchen Darstellung der Störungsfunktion zugleich diejenige Ellipse entspreche, welche den engsten Anschluss an die wirkliche Bewegung des gestörten Körpers ermöglicht. Bei näherer Betrachtung findet man, dass dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

Man weiss, dass in der ungestörten elliptischen Bewegung der Leitstrahl mit der Richtung der anziehenden Kraft zusammenfällt. Nicht so in dem Problem der drei Körper, wenn man an der Annahme

$\varepsilon = 0$ festhält. Der Leitstrahl verbindet dann auch wieder die Masse m mit dem Centralkörper. Die erstere wird aber gleichzeitig von dem Centralkörper und von der Masse m_1 angezogen. Die Richtung der Resultante der beiden Anziehungen, welche die Masse m erleidet, geht desshalb nicht durch den Ort des Centralkörpers; sie ist vielmehr eine in der Ebene der drei Körper gezogene Gerade, welche zwischen dem Centralkörper und dem störenden Körper hindurchgeht. Indem man durch die Annahme $\varepsilon = 0$ den Leitstrahl in eine Lage bringt, welche von der Richtung der Resultante der beiden anziehenden Kräfte mehr oder weniger abweicht, gibt man die erwähnte Eigenthümlichkeit preis, durch welche sich die ungestörte elliptische Bewegung so vortheilhaft auszeichnet.

Unzweifelhaft hat der Winkel, welchen der Leitstrahl mit der Richtung der anziehenden Kraft bildet, einen Einfluss auf die Variation der gestörten Elemente. Es frägt sich nun, in welcher Weise man auf die letzteren einwirken kann, wenn man den Winkel zwischen jenen beiden Geraden, welche durch die Annahme $\varepsilon = 0$ in eine bestimmte Beziehung zu einander gebracht sind, der Analysis zur freien Verfügung stellt. Die Annahme, dass die beiden Geraden zusammenfallen, würde sich als ein besonderer Fall dieser Untersuchung darbieten, welcher in ihrer Allgemeinheit voraussichtlich keine allzugrossen Schwierigkeiten entgegenstehen. Denn es ist leicht zu sehen, dass man die Richtung des Leitstrahls in jedem Augenblicke nach Belieben ändern kann, indem man die Grösse ε, welche bisher der Null gleichgesetzt worden ist, als unbestimmte Veränderliche auffasst. Der Abstand des Brennpunktes der von der Masse m beschriebenen Ellipse vom Centralkörper ist eine von ε abhängige Grösse, und verschwindet gleichzeitig mit ε. Derselbe bestimmt sich durch den Ausdruck $\sqrt{\frac{1+m}{m}}\, r_1 \sin \varepsilon$. Die Grösse ε, welche in einer so nahen Beziehung zu diesem Abstande steht, soll desshalb die Focodistanz heissen.

So lange ε als willkürliche Beständige gedacht wird, bleiben die in dem ersten Abschnitte gegebenen Differentialgleichungen der Bewegung jederzeit fortbestehen. Unter dieser Voraussetzung hat die Grösse ε nur auf die Gestaltung der Störungsfunktion eine Einwirkung. Wenn aber ε eine unbestimmte Funktion der Zeit ist, so zeigen sich ausserhalb der Störungsfunktion neue von ε abhängige Glieder in den Differentialgleichungen. Unsere Aufgabe sei zunächst, die neuen Differentialgleichungen der Bewegung aufzustellen, welche jener Annahme entsprechen, dass die Focodistanz eine unbestimmte Funktion der Zeit sei.

Ich gehe in dieser Absicht von den Differentialgleichungen des § 1 aus:

$$\xi'' = \frac{dU}{d\xi} \qquad \xi_1'' = \frac{dU}{d\xi_1};$$

und setze wieder, zum Behufe der weiteren Transformation:

$$\xi = x \cos \varepsilon + x_1 \sin \varepsilon \qquad \xi_1 = x_1 \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon,$$

wo nun die Grösse ε nicht mehr beständig, sondern eine unbestimmte Funktion der Zeit sein soll. Mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{d\xi} \cos \varepsilon - \frac{dU}{d\xi_1} \sin \varepsilon$$

erhält man aus den obigen Gleichungen die neue:

$$\xi'' \cos \varepsilon - \xi_1'' \sin \varepsilon = \frac{dU}{dx}.$$

Dieselbe kann zunächst umgeschrieben werden in:

$$(\xi' \cos \varepsilon - \xi_{,}' \sin \varepsilon)' + (\xi_{,}' \cos \varepsilon + \xi' \sin \varepsilon)\varepsilon' = \frac{dU}{dx}.$$

Durch die Substitution der obigen Werthe ξ und $\xi_{,}$ geht sie über in die einfachere:

$$(x' + x_{,}\varepsilon') + (x_{,}' - x\varepsilon')\varepsilon' = \frac{dU}{dx},$$

welche noch vortheilhafter in Folgendem geschrieben wird:

1. $$x'' + x_{,}\varepsilon'' + 2x_{,}'\varepsilon' - x\varepsilon'^2 = \frac{dU}{dx}.$$

Dies ist die neue Differentialgleichung, durch welche die Bewegung der Masse m in der Richtung der X Achse bestimmt wird. Indem man die gleichnamigen unten gestrichenen und nicht gestrichenen Coordinaten gegen einander vertauscht, und gleichzeitig ε gegen $-\varepsilon$, gelangt man zu der der andern Masse $m_{,}$ entsprechenden Gleichung:

1. $$x_{,}'' - x\varepsilon'' - 2x'\varepsilon' - x_{,}\varepsilon'^2 = \frac{dU}{dx_{,}}.$$

Die übrigen Coordinaten des rechtwinkeligen Systems bestimmen sich aus ähnlichen Gleichungen. Es ist bemerkenswerth, dass in allen diesen Gleichungen die Grösse ε ausserhalb der Funktion U nur als Derivirte vorkommt. Man sieht aber auch, dass die neuen Differentialgleichungen nicht mehr die kanonische Form haben. Dieselbe kommt erst dann wieder zum Vorschein, wenn die Derivirten von ε verschwinden, wenn also ε als Beständige gedacht wird.

§ 41. Die Flächenintegrale als Funktion von Polarcoordinaten.

Um die Flächenintegrale aufzustellen, bildet man durch die Verbindung der Gleichungen 1. mit einander zunächst die folgenden:

$$yz'' - zy'' + (yz_{,} - zy_{,})\varepsilon'' + 2(yz_{,}' - zn_{,}')\varepsilon' = y\frac{dU}{dz} - z\frac{dU}{dy}$$

$$xz'' - zx'' + (xz_{,} - zx_{,})\varepsilon'' + 2(xz_{,}' - zx_{,}')\varepsilon' = x\frac{dU}{dz} - z\frac{dU}{dx}$$

$$xy'' - yx'' + (xy_{,} - yx_{,})\varepsilon'' + 2(xy_{,}' - yx_{,}')\varepsilon' = x\frac{dU}{dy} - y\frac{dU}{dx}.$$

Die auf der linken Seite stehenden Derivirten der zweiten Ordnung lassen sich jedesmal in einer einzigen Derivirten zusammenfassen. Indem man gleichzeitig U als Funktion von r $r_{,}$ s auffasst, erhält man:

$$\left(y z' - z y' + (y z_, - z y_,) \varepsilon'\right)' + (y_, z' - z_, y' + y z_,' - z y_,') \varepsilon' = \frac{y z_, - z y_,}{r r_,} \frac{dU}{ds}$$

2. $$\left(x z' - z x' + (x z_, - z x_,) \varepsilon'\right)' + (x_, z' - z_, x' + x z_,' - z x_,') \varepsilon' = \frac{x z_, - z x_,}{r r_,} \frac{dU}{ds}$$

$$\left(x y' - y x' + (x y_, - y x_,) \varepsilon'\right)' + (x_, y' - y_, x' + x y_,' - y x_,') \varepsilon' = \frac{x y_, - y x_,}{r r_,} \frac{dU}{ds}.$$

Man schreibe nun auch die entsprechenden Gleichungen der andern Bahn, indem man die unten gestrichenen und die nicht gestrichenen Buchstaben gegen einander und zugleich ε gegen $-\varepsilon$ vertauscht. Man addire je zwei einander entsprechende Gleichungen, und es entstehen die drei Flächenintegrale:

$$y z' - z y' + y_, z_,' - z_, y_,' + 2 (y z_, - z y_,) \varepsilon' = o$$

3. $$x z' - z x' + x_, z_,' - z_, x_,' + 2 (x z_, - z x_,) \varepsilon' = o$$

$$x y' - y x' + x_, y_,' - y_, x_,' + 2 (x y_, - y x_,) \varepsilon' = o.$$

Dem rechtwinkeligen Coordinatensysteme denkt man sich durch Drehungen um den Ursprung eine solche Lage gegeben, dass die willkürlichen Beständigen der beiden ersten Flächenintegrale zum Verschwinden kommen.

Einfacher und anschaulicher gestalten sich die drei Flächenintegrale, wenn sie durch Polarcoordinaten ausgedrückt sind. Man setze wieder:

$$x = r(\cos\vartheta \cos u - \cos i \sin\vartheta \sin u)$$

4. $$y = r(\sin\vartheta \cos u + \cos i \cos\vartheta \sin u)$$

$$z = r \sin i \sin u;$$

und halte an der Annahme des § 3 fest, dass die Ebene der Polarcoordinaten mit der Ebene der Bahn zusammenfalle. Die in Folge dessen zwischen den Derivirten ϑ' i' u' bestehende Abhängigkeit ist im § 5 durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt worden:

$$u' + \cos i\, \vartheta' = \frac{n}{r^2} \qquad\qquad i' = \sin i \cot u\, \vartheta',$$

wo n eine weitere Veränderliche ist. Nebenbei hat diese Annahme die einfachen Gleichungen zur Folge:

$$y z' - z y' = n \sin i \sin\vartheta$$

$$x z' - z x' = n \sin i \cos\vartheta$$

$$x y' - y x' = n \cos i.$$

Man schreibt noch die drei entsprechenden Gleichungen der andern Bahn. Eliminirt man alsdann alle Derivirten der rechtwinkeligen Coordinaten, so geben die obigen Flächenintegrale über in:

$$n \sin i \sin\vartheta + n_, \sin i_, \sin\vartheta_, + 2 (y z_, - z y_,) \varepsilon' = o$$

$$n \sin i \cos\vartheta + n_, \sin i_, \cos\vartheta_, + 2 (x z_, - z x_,) \varepsilon' = o$$

$$n \cos i + n_, \cos i_, - c \quad + 2 (x y_, - y x_,) \varepsilon' = o.$$

Es versteht sich, dass man aus den vorliegenden Flächenintegralen zwei von ε' unabhängige Gleichungen herleiten kann. In dieser Absicht multiplicire man dieselben der Reihe nach mit $x\, y\, z$, sodann auch mit $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, und addire jedesmal die drei Gleichungen. Man merke dabei auf die identischen Gleichungen:

$$x(y z_{,} - z y_{,}) - y(x z_{,} - z x_{,}) + z(x y_{,} - y x_{,}) = 0$$

$$x_{,}(y z_{,} - z y_{,}) - y_{,}(x z_{,} - z x_{,}) + z_{,}(x y_{,} - y x_{,}) = 0\,.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 4. kann man ausserdem die identischen Gleichungen anschreiben:

$$x \sin i \sin \vartheta - y \sin i \cos \vartheta + z \cos i = o$$

$$x_{,} \sin i_{,} \sin \vartheta_{,} - y_{,} \sin i_{,} \cos \vartheta_{,} + z_{,} \cos i_{,} = o\,,$$

und, indem man abkürzend $\vartheta - \vartheta_{,} = \Theta$ setzt, noch die weitern:

$$\frac{1}{r}(x \sin i_{,} \sin \vartheta_{,} - y \sin i_{,} \cos \vartheta_{,} + z \cos i_{,}) = (\sin i \cos i_{,} - \sin i_{,} \cos i \cos \Theta) \sin u - \sin i_{,} \sin \Theta \cos u$$

$$\frac{1}{r_{,}}(x_{,} \sin i \sin \vartheta - y_{,} \sin i \cos \vartheta + z_{,} \cos i) = (\sin i_{,} \cos i - \sin i \cos i_{,} \cos \Theta) \sin u_{,} + \sin i \sin \Theta \cos u_{,}\,.$$

Die beiden von ε' unabhängigen Flächenintegrale erhalten dann die folgende Form:

5. $$\sin i \cos i_{,} - \sin i_{,} \cos i \cos \Theta - \sin i_{,} \sin \Theta \cot u = \frac{c \sin i}{n_{,}}$$

$$\sin i_{,} \cos i - \sin i \cos i_{,} \cos \Theta + \sin i \sin \Theta \cot u_{,} = \frac{c \sin i_{,}}{n}\,.$$

Um auch das dritte Flächenintegral, aus welchem die Derivirte ε' nicht entfernt werden kann, durch Polarcoordinaten auszudrücken, schreibt man die identische Gleichung:

$$\frac{x z_{,} - z x}{r r_{,}} \sin \vartheta - \frac{y z_{,} - z y_{,}}{r r_{,}} \cos \vartheta = - \sin u \sin u_{,} (\sin i_{,} \cos i - \sin i \cos i_{,} \cos \Theta + \sin i \sin \Theta \cot u_{,}),$$

welche, wegen der vorstehenden Flächenintegrale 5. übergeht in:

$$\frac{x z_{,} - z x_{,}}{r r_{,}} \sin \vartheta - \frac{y z_{,} - z y_{,}}{r r_{,}} \cos \vartheta = - \sin u \sin u_{,} \frac{c \sin i_{,}}{n}\,.$$

Multiplicirt man die beiden ersten der obigen drei Flächenintegrale beziehungsweise mit $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$, um dieselben alsdann von einander abzuziehen, so gibt man auf Grund dieser identischen Gleichung dem dritten Flächenintegrale die zweigliederige Form:

6. $$n\, n_{,} \sin \Theta = 2\, r\, r_{,} \sin u \sin u_{,}\, \varepsilon'.$$

Wenn ε eine Beständige ist, wenn also $\varepsilon' = 0$ gesetzt wird, so folgt aus dieser Gleichung auch $\Theta = \vartheta - \vartheta_{,} = 0$. Wenn aber ε als Funktion der Zeit betrachtet wird, so ist die Grösse Θ ein kleiner Winkel, welcher nur in gewissen periodisch wiederkehrenden Zeitpunkten verschwindet. Es muss entweder $\sin u = 0$ oder $\sin u_{,} = 0$ sein, es muss also der eine der beiden sich störenden Körper durch die Ebene des Pols hindurchgehen. In diesen Zeitpunkten fällt zugleich der gemeinsame Durchschnitt der beiden

Bahnebenen in die genannte Coordinatenebene hinein, während derselbe zu jeder andern Zeit diese Ebene unter einem gewissen Winkel schneidet.

Auch die beiden Flächenintegrale 5. lassen sich in einer zweigliederigen Form darstellen, sobald man auf die geometrische Beziehung zwischen den beiden Bahnebenen Rücksicht nimmt. Es seien ν und $\nu_{,}$ die beiden Winkel, welche der gemeinsame Durchschnitt der beiden Bahnebenen mit den betreffenden Knoten bildet. Die Winkel, welche die beiden Leitstrahlen mit diesem Durchschnitte bilden, sind dann $u-\nu$ und $u_{,}-\nu_{,}$. Aus den neuen Flächenintegralen, deren Herleitung hier beabsichtigt wird, lässt sich ersehen, dass jetzt ebenso, wie es sich für den Fall $\varepsilon' = 0$ herausgestellt hat, die Winkel i und $i_{,}$, welche die Ebenen der beiden Bahnen mit der Ebene des Pols bilden, stets entgegengesetzte Zeichen führen. Dies vorausgesetzt, erhalten auch die Winkel ν und $\nu_{,}$ entgegengesetzte Zeichen. Es ist bekannt, dass die Winkel u und $u_{,}$ stets positiv gedacht werden. Wenn nun in der einen Bahn $u - \nu < u$ oder $\nu > 0$ gedacht wird, so folgt aus den gegebenen Voraussetzungen, dass in der anderen Bahn $u_{,} - \nu_{,} > u_{,}$ oder $\nu_{,} < 0$ sein müsse. Man denke sich $i > 0$ und $i_{,} < 0$, und nehme an, dass $\vartheta - \vartheta_{,} = \Theta > 0$ sei. Man findet dann $\nu < 0$ und $\nu_{,} > 0$. Es sei ferner J der Winkel, welchen die Bahnebenen mit einander bilden. Den beiden Bahnebenen in Verbindung mit der Ebene des Pols entspricht ein sphärisches Dreieck, in welchem den drei Seiten $-\nu$ $\nu_{,}$ und Θ beziehungsweise die Winkel $-i_{,}$ i und $180 - J$ gegenüber stehen. Dieses sphärische Dreieck liefert die Gleichungen:

$$\cos\nu\ \sin J = \sin i \cos i_{,} - \cos i \sin i_{,} \cos\Theta$$

$$\cos\nu_{,} \sin J = -\sin i_{,} \cos i + \cos i_{,} \sin i \cos\Theta$$

$$\sin\nu\ \sin J = \sin i_{,} \sin\Theta$$

$$\sin\nu_{,} \sin J = \sin i \sin\Theta\,.$$

Die Flächenintegrale unter 5. werden dadurch übergeführt in die zweigliedrigen:

$$n_{,} \sin J \sin(u - \nu) = c \sin i \sin u$$

7.

$$-n \sin J \sin(u_{,} - \nu_{,}) = c \sin i_{,} \sin u_{,}.$$

Diese Gleichungen führen gleichfalls zu dem schon aus dem Flächenintegrale 6. gezogenen Schlusse. Wenn nämlich $\sin u = 0$ gesetzt wird, so ist auch $\nu = 0$. Ferner folgt aus den Gleichungen des sphärischen Dreiecks für diesen Fall, wegen $\Theta = 0$, ausserdem noch $\nu_{,} = 0$. Wenn also der gestörte Körper durch die Ebene des Pols hindurchgeht, so geht er gleichzeitig durch die Ebene des störenden Körpers. Die Ebene der beiden sich störenden Körper und die Ebene des Pols schneiden sich in diesem Falle in einer und derselben Geraden.

Man bemerke noch, dass für den oft erwähnten Fall, wo die Bahn des störenden Körpers als eine ungestörte Ellipse angesehen werden darf, weil nämlich das Verhältniss $\frac{n}{n_{,}}$ neben der Einheit verschwindet, die einfachen Gleichungen $i_{,} = 0$, $J = i$, $n_{,} = c$, welche sich unter der Annahme $\varepsilon' = 0$ ergeben haben, fortbestehen, dass aber hier gleichzeitig noch die beiden Gleichungen $\nu = 0$ und $\nu_{,} = \Theta$ angesetzt werden müssen.

Die in der Kräftefunktion vorkommende Veränderliche s, welche in rechtwinkeligen Coordinaten durch die Gleichung $r r_{,} s = x x_{,} + y y_{,} + z z_{,}$ bestimmt ist, bezeichnet bekanntlich den cosinus des Winkels,

welchen die beiden Leitstrahlen r und $r_{,}$ mit einander bilden. Mit der Ebene der drei Körper bilden die beiden Bahnebenen ein sphärisches Dreieck, aus welchem die Grösse s unmittelbar als Funktion der Polarcoordinaten gefunden wird. Es ist:

$$s = \cos(u - v)\cos(u_{,} - v_{,}) + \cos J \sin(u - v)\sin(u_{,} - v_{,}).$$

§ 42. Der Leitstrahl des gestörten Körpers in der Richtung der resultirenden Anziehung.

Wir behalten nun vorzugsweise die Bewegung der einen Masse m im Auge. Dieselbe wird von dem Centralkörper, und gleichzeitig von der andern Masse $m_{,}$ angezogen. In dem ersten Abschnitte ist gezeigt worden, dass durch die Einführung von ε in die lineare Transformation der Nullpunkt der Coordinaten von dem Orte des Centralkörpers weg nach einem andern der Ebene der drei Körper angehörigen Punkte verlegt wird. Da auch die Richtung der Resultante der beiden Anziehungen in die Ebene der drei Körper hineinfällt, so steht Nichts im Wege, die Grösse ε in solcher Weise zu bestimmen, dass diese Resultante durch den Nullpunkt der Coordinaten geht, dass also der Leitstrahl der Masse m mit deren Richtung zusammenfällt. Hierdurch wird auch der Bahn des gestörten Körpers jene Eigenschaft zugetheilt, welche im § 40 als eine Eigenthümlichkeit der ungestörten elliptischen Bewegung hervorgehoben worden ist.

Die freie Bewegung des Körpers wird von der geraden Linie weg in der Richtung der resultirenden Anziehung abgelenkt. Die Lage der Krümmungsebene in irgend einem Punkte der Bahn ist demnach durch die Tangente der Bahn und jene Resultante bestimmt. Man bemerke, dass die Ebene der Bahn durch die Tangente und den Leitstrahl bestimmt ist. Da nun der Leitstrahl in die Richtung jener Resultante hineinfallen soll, so müssen auch die Krümmungsebene und die Ebene der Bahn zusammenfallen. Dies führt schnell zu derjenigen Gleichung, durch welche sich die Veränderliche ε der ausgesprochenen Forderung gemäss bestimmt.

Von den Polarcoordinaten des bewegten Körpers ausgehend:

$$x = r(\cos\vartheta \cos u - \cos i \sin\vartheta \sin u)$$

$$y = r(\sin\vartheta \cos u + \cos i \cos\vartheta \sin u)$$

$$z = r \sin i \sin u$$

erhält man leicht auch die Gleichung, durch welche die Ebene der Polarcoordinaten ihrer Lage nach bestimmt ist. Man braucht desshalb nur die beiden Veränderlichen r und u zu eliminiren. Man erhält:

$$x \sin i \sin\vartheta - y \sin i \cos\vartheta + z \cos i = 0.$$

Die Forderung, dass diese Ebene zugleich durch die Tangente der Bahn gehen soll, gibt ferner:

$$x' \sin i \sin\vartheta - y' \sin i \cos\vartheta + z' \cos i = 0.$$

Da die Lage der Krümmungsebene auch durch zwei auf einander folgende Elemente der Bahn bestimmt werden kann, so entspricht derselben noch die weitere Gleichung:

$$x'' \sin i \sin \vartheta - y'' \sin i \cos \vartheta + z'' \cos i = 0 .$$

Eliminirt man die zweiten Derivirten der Coordinaten mit Hilfe der im § 40 aufgestellten Gleichungen 1., so gelangt man zu derjenigen Gleichung, aus welcher die Veränderliche ε bestimmt werden müsste, damit in der gestörten Bahn der Leitstrahl mit der Richtung der resultirenden Anziehung zusammenfällt. Man findet:

$$(x_1 \sin i \sin \vartheta - y_1 \sin i \cos \vartheta + z_1 \cos i)\, \varepsilon'' + 2 (x_1' \sin i \sin \vartheta - y_1' \sin i \cos \vartheta + z_1' \cos i)\, \varepsilon'$$

$$= \frac{dU}{dx} \sin i \sin \vartheta - \frac{dU}{dy} \sin i \cos \vartheta + \frac{dU}{dz} \cos i .$$

Die Bahn des gestörten Körpers, bezogen auf den Ort des Centralkörpers, ist eine doppelt gekrümmte Curve. Wenn der Nullpunkt der Coordinaten mit dem Centralkörper nicht zusammenfällt, sondern auf diesen bezogen selbst eine Bewegung hat, so kann es nicht befremden, dass die Bahn des gestörten Körpers, da sie auf den Ort des beweglichen Nullpunktes bezogen ist, eine andere Gestalt annimmt. Denn der Weg des gestörten Körpers in der Richtung irgend einer der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen wird dann um den in der gleichen Richtung von dem Nullpunkte der Coordinaten während desselben Zeitraums zurückgelegten Weg verkürzt. An die obige Forderung in Betreff der Grösse ε knüpft sich eine merkwürdige Eigenschaft, welche die Bahn des gestörten Körpers in Folge der dem Nullpunkte der Coordinaten zugetheilten Bewegung annimmt. Aus dem gleichzeitigen Bestehen der obigen drei Gleichungen, welche einer und derselben Ebene entsprechen, folgt nämlich, dass die Grössen ϑ und i beständig sind. Differentiirt man die erste Gleichung, und eliminirt alsdann die Derivirten $x'\, y'\, z'$ mit Hilfe der zweiten; differentiirt man auch die zweite Gleichung, um die Derivirten $x''\, y''\, z''$ mit Hilfe der dritten zu eliminiren, so ergeben sich sofort die beiden Gleichungen $\vartheta' = 0$ und $i' = 0$. Die Forderung, dass der Leitstrahl des gestörten Körpers mit der Richtung der resultirenden Anziehung zusammenfalle, macht demnach die Bahn des gestörten Körpers zu einer Curve, welche in einer sich selbst stets parallel bleibenden Ebene beschrieben wird.

Dass hier die Ebene der Bahn ihrer anfänglichen Lage stets parallel bleiben muss, davon kann man sich leicht auch durch eine andere Betrachtung überzeugen. Wenn nämlich der Nullpunkt der Coordinaten auf derjenigen Geraden liegen soll, welche die Richtung der resultirenden Anziehung angibt, so kann man sich denken, es sei nur ein einziger anziehender Punkt vorhanden, welcher gleichfalls auf dieser Geraden liegt. Die Entfernung desselben von dem Ort des bewegten Körpers mag hier mit $k\,r$ bezeichnet sein, wo k ein unbestimmter veränderlicher Coefficient ist. Man hat dann die folgenden Gleichungen:

$$y\,(k\,z)'' - z\,(k\,y)'' = 0$$

$$x\,(k\,z)'' - z\,(k\,x)'' = 0$$

$$x\,(k\,y)'' - y\,(k\,x)'' = 0 .$$

Multiplicirt man dieselben mit k, so erhält man durch die Integration:

$$k^2\,(y\,z' - z\,y') = c_1$$

$$k^2\,(x\,z' - z\,x') = c_2$$

$$k^2\,(x\,y' - y\,x') = c_3 .$$

Indem man hier anstatt der rechtwinkeligen Coordinaten die Polarcoordinaten einführt, werden diese Gleichungen umgewandelt in:

$$k^2 n \sin i \sin \vartheta = c_1$$

$$k^2 n \sin i \cos \vartheta = c_2$$

$$k^2 n \cos i \qquad = c_3 .$$

Daraus folgt auf der Stelle, dass $k^2 n$ eine Beständige ist. Es folgt auch, was man zeigen wollte, dass ϑ und i Beständige sind.

Mit Rücksicht auf die Unveränderlichkeit der Elemente ϑ und i lässt sich die Gleichung zur Bestimmnng von ε etwas einfacher darstellen. Man betrachte U als Funktion der Polarcoordinaten $r\, r_,\, s$, und man erhält, wegen der identischen Gleichung:

$$x \sin i \sin \vartheta - y \sin i \cos \vartheta + z \cos i = 0$$

die folgende Transformation:

$$\frac{dU}{dx} \sin i \sin \vartheta - \frac{dU}{dy} \sin i \cos \vartheta + \frac{dU}{dz} \cos i = (x_, \sin i \sin \vartheta - y_, \sin i \cos \vartheta + z_, \cos i) \frac{1}{r r_,} \frac{dU}{ds} .$$

In dem vorigen Paragraphen ist ferner die identische Gleichung aufgestellt worden:

$$x_, \sin i \sin \vartheta - y_, \sin i \cos \vartheta + z_, \cos i = - r_, \sin J \sin (u_, - v_,) .$$

Die Gleichung zur Bestimmnng von ε geht deshalb über in:

$$r_, \sin J \sin (u_, - v_,) \varepsilon'' + 2 \left(r_, \sin J \sin (u_, - v_,) \right)' \varepsilon' = \sin J \sin (u_, - v_,) \frac{1}{r} \frac{dU}{ds} ,$$

oder noch einfacher in:

8. $$\left(\sin^2 J \sin^2 (u_, - v_,) r_,^2 \varepsilon' \right)' = \sin^2 J \sin^2 (u_, - v_,) \frac{r_,}{r} \frac{dU}{ds} .$$

In dieser Gleichung verschwindet der Factor von ε' periodisch, zweimal während eines Umlaufs des störenden Körpers, immer dann, wenn der störende Körper durch die Ebene des gestörten hindurch geht. Daraus folgt, dass die durch die Gleichung 8. bestimmte Veränderliche ε nicht immer einen endlichen Werth hat. Dieselbe ist unendlich gross, sobald jener Factor verschwindet. In der Störungstheorie aber sind der Variation von ε enge Grenzen gesteckt, weil verlangt wird, dass die durch dessen Einführung bewirkte Verrückung des Brennpunktes von dem Orte des Centralkörpers weg jederzeit eine kleine Grösse der ersten Ordnnng darstelle. Diese Forderung ist hier nicht erfüllt, und es folgt daraus, dass die Grösse ε in der vorgeschlagenen Weise nicht verwendet werden darf, wenn man nicht überhaupt darauf verzichten will, zu einer brauchbaren Lösung des Integrals zu gelangen. Auch schon aus der Unveränderlichkeit der Elemente ϑ und i, welche eine nothwendige Folge der oben an die Grösse ε gestellten Forderung ist, lässt sich ohne weitere Analysis ersehen, dass diese Forderung mit der Störungstheorie unverträglich ist. Denn man weiss, dass der Knoten für den Fall $\varepsilon = 0$ fortwährend im Abnehmen begriffen ist. Der Wegfall des der Zeit proportionalen Gliedes von ϑ kann aber durch eine stetige Aenderung der Grösse ε nicht ausgeglichen werden.

Die Analysis hat nun gezeigt, dass auch in der gestörten Bahn der Leitstrahl jederzeit die Richtung der resultirenden Anziehung einhalten kann; dass aber diese Auffassung der Bewegungserscheinung mit den Forderungen der Störungstheorie unvereinbar ist, weil der Brennpunkt der Ellipse auf dem vorgezeichneten Wege in unbegrenzte Entfernungen hinausläuft. Es sei denn, dass man sich darauf beschränken wollte, nur einen solchen Theil der Bahn zu verfolgen, für welchen jene Grenzen, welche dem Werthe ε gesteckt sind, eingehalten werden können. In jedem andern Falle ist man genöthigt, dem Leitstrahle eine von dieser Resultante abweichende Richtung zu geben.

§ 43. Die kanonische Form der Flächenintegrale wiederhergestellt, und das Integral der lebendigen Kraft.

Die Derivirten der Elemente $\vartheta\ i\ n$ lassen sich leicht aufstellen, indem man in die Gleichungen 2. des § 41 anstatt der rechtwinkeligen die Polarcoordinaten setzt. Es versteht sich, dass die entsprechenden Störungsgleichungen ebenso wie auch die Gleichungen 2. Glieder enthalten, welche mit den Derivirten ε'' und ε' multiplicirt sind. Wenn man aber die zweite Derivirte ε'' mit der Derivirten des Elementes in eine einzige Derivirte zusammenfasst, so hat man den analytischen Ausdruck derjenigen Transformation, welcher sich das Element unterwerfen müsste, damit die Derivirte des neuen Elementes von ε'' unabhängig werde. Wiewohl nun nicht gerade behauptet werden kann, dass die so transformirten Störungsgleichungen vor den ursprünglichen durch grössere Einfachheit ausgezeichnet sind, so gebührt denselben doch aus einem andern Grunde der Vorzug. Es haben nämlich die drei Flächenintegrale, nachdem die neuen Elemente an die Stelle von $\vartheta\ i\ n$ getreten sind, die kanonische Form, worunter jene einfache Form verstanden sein soll, welche sich in dem kanonischen Systeme der Bewegungsgleichungen, also unter der Annahme $\varepsilon' = 0$ ergeben hat. Um nicht die soeben vorgezeichnete Transformation wirklich ausführen zu müssen, was ziemlich beschwerlich sein würde, nehme ich zum Behufe der Herleitung der transformirten Störungsgleichungen von vorn herein einen andern Ausgangspunkt.

Es sind schon im § 41 in die Differentialgleichungen der Bewegung, welche einem veränderlichen ε entsprechen, anstatt der rechtwinkeligen Coordinaten die Polarcoordinaten eingeführt worden. In Folge dessen sind die drei Coordinaten $x\,y\,z$ durch die vier neuen Veränderlichen $r\ u\ \vartheta\ i$ ersetzt worden, und es ist also eine überzählige Veränderliche in die transformirten Differentialgleichungen eingegangen. Nebenbei aber sind, ebenso wie für den Fall $\varepsilon' = 0$ geschehen ist, die folgenden drei Gleichungen angesetzt worden:

$$y\,z' - z\,y' = n \sin i \sin \vartheta$$
$$x\,z' - z\,x' = n \sin i \cos \vartheta$$
$$x\,y' - y\,x' = n \cos i.$$

Von diesen Gleichungen sind bekanntlich nur zwei unter sich wesentlich verschieden. Die dritte folgt identisch aus den beiden andern. Durch diese beiden Gleichungen soll neben der in den Coordinatenwerthen $x\,y\,z$ vorkommenden überzähligen Veränderlichen zugleich die noch weiter eingeführte Veränderliche n bestimmt sein. In eben diesen Gleichungen ist zugleich die Forderung ausgesprochen, dass die Ebene der Bahn mit der Ebene der Polarcoordinaten zusammenfalle, dass also auch die Ebene der Bahn durch jene Elemente ϑ und i der Lage nach bestimmt sei.

Um unter der Annahme eines veränderlichen ε jene einfache Form der Flächenintegrale wieder herzustellen, welche sich für den Fall $\varepsilon' = 0$ ergeben hat, ist man genöthigt, die erwähnte Beziehung der Elemente ϑ und i zu der veränderlichen Ebene der Bahn fallen zu lassen. Man kann unbedenklich die Polarcoordinaten von dieser Abhängigkeit befreien. Denn es kommt in der That nur darauf an, dass die Abweichungen von der Ebene der Bahn, welche die den Elementen ϑ und i entsprechende Ebene zeigt, als kleine Grössen der ersten Ordnung sich darstellen. Was die Ebene der Bahn betrifft, so weiss man von vorn herein, dass deren Schwankungen kleine Grössen der ersten Ordnung sind. Das Gleiche wird auch von den Variationen der Elemente i und ϑ gefordert.

An die Stelle der obigen drei Gleichungen lasse ich die nachfolgenden treten:

9.
$$\begin{aligned} y z' - z y' + (y z_, - z y_,)\,\varepsilon' &= n \sin i \sin \vartheta \\ x z' - z x' + (x z_, - z x_,)\,\varepsilon' &= n \sin i \cos \vartheta \\ x y' - y x' + (x y_, - y x_,)\,\varepsilon' &= n \cos i\,, \end{aligned}$$

von denen die dritte auch wieder aus den beiden andern abgeleitet werden kann. Mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$x \sin i \sin \vartheta - y \sin i \cos \vartheta + z \cos i = 0$$

ist dies auf der Stelle ersichtlich, wenn man die obigen Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z multiplicirt, und alsdann addirt. Durch diese Annahme wird aber die kanonische Form der Flächenintegrale wieder hergestellt. Man schreibe für die andere Bahn die entsprechenden Gleichungen, indem man die unten gestrichenen und die nicht gestrichenen Buchstaben der Gleichungen 9. gegeneinander, und gleichzeitig ε gegen $-\varepsilon$ vertauscht. Die im § 41 unter 3. aufgezeichneten Flächenintegrale gehen durch die Elimination der rechtwinkeligen Coordinaten sofort über in:

$$\begin{aligned} n \sin i \sin \vartheta + n_, \sin i_, \sin \vartheta_, &= 0 \\ n \sin i \cos \vartheta + n_, \sin i_, \cos \vartheta_, &= 0 \\ n \cos i + n_, \cos i_, - c \quad &= 0\,. \end{aligned}$$

An deren Statt können wieder die einfacheren gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_, \\ n_, \sin(i - i_,) &= c \sin i \\ n \sin(i_, - i) &= c \sin i_,\,. \end{aligned}$$

Es ist schon oben bemerkt worden, dass die Differentialgleichungen der rechtwinkeligen Coordinaten, welche einem veränderlichen ε entsprechen, ein System darstellen, welches nicht mehr die kanonische Form hat. Es ist nun gezeigt worden, dass in diesem Systeme jene einfache Form der Flächenintegrale, ebenso wie in dem kanonischen Systeme, wieder auftritt. Man dürfte also nicht sagen, das kanonische System sei durch diese Form der Flächenintegrale gekennzeichnet.

Auf Grund dieser einfachen Flächenintegrale nimmt auch die Gleichung $r r_, s = x x_, + y y_, + z z_,$, nachdem man die Polarcoordinaten eingeführt hat, die frühere einfache Gestalt wieder an. Es ist:

$$s = \cos u \cos u_, + \cos(i - i_,) \sin u \sin u_,\,.$$

Die Gleichungen 9., welche jene einfachen Flächenintegrale ermöglichen, können übrigens noch in einer andern Form angeschrieben werden, welche sich zum Behufe der Elimination der rechtwinkeligen Coordinaten mehrfach als brauchbarer erweist. Wenn $\varepsilon' = 0$ gesetzt wird, so drücken dieselben bekanntlich die Forderung aus, dass sich die Derivirten von $\frac{x}{r}\ \frac{y}{r}\ \frac{z}{r}$ ganz ebenso gestalten sollen wie für den Fall, dass ϑ und i beständige Grössen seien, vergl. § 3. Dieser Forderung hat man einen einfacheren analytischen Ausdruck gegeben in den Gleichungen:

$$\left(\frac{x}{r}\right)' = \left(\frac{x}{r}\right)_n \frac{n}{r^2} \qquad \left(\frac{y}{r}\right)' = \left(\frac{y}{r}\right)_n \frac{n}{r^2} \qquad \left(\frac{z}{r}\right)' = \left(\frac{z}{r}\right)_n \frac{n}{r^2},$$

von welchen die dritte in den beiden andern enthalten ist, wegen der beiden identischen Gleichungen:

$$\frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' = 0$$

$$\frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_n + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_n + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)_n = 0.$$

Da nun nicht mehr $\varepsilon' = 0$ ist, so setze ich an die Stelle der soeben aufgezeichneten die drei nachfolgenden:

10.
$$\left(\frac{x}{r}\right)' + \left(\frac{x_,}{r_,} - \frac{xs}{r}\right)\frac{r_,}{r}\varepsilon' = \left(\frac{x}{r}\right)_n \frac{n}{r^2}$$

$$\left(\frac{y}{r}\right)' + \left(\frac{y_,}{r_,} - \frac{ys}{r}\right)\frac{r_,}{r}\varepsilon' = \left(\frac{y}{r}\right)_n \frac{n}{r^2}$$

$$\left(\frac{z}{r}\right)' + \left(\frac{z_,}{r_,} - \frac{zs}{r}\right)\frac{r_,}{r}\varepsilon' + \left(\frac{z}{r}\right)_n \frac{n}{r^2}.$$

Um nachzuweisen, dass dieselben gleichbedeutend sind mit den obigen Gleichungen 9., schreibe man die letzteren, nachdem man dieselben durch r^2 getheilt hat, in der wenig geänderten Form:

$$\frac{y}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' - \frac{z}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{y z_, - z y_,}{r^2}\varepsilon' = \left(\frac{y}{r}\left(\frac{z}{r}\right)_n - \frac{z}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_n\right)\frac{n}{r^2}$$

$$\frac{x}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' - \frac{z}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{x z_, - z x_,}{r^2}\varepsilon' = \left(\frac{x}{r}\left(\frac{z}{r}\right)_n - \frac{z}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_n\right)\frac{n}{r^2}$$

$$\frac{x}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' - \frac{y}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{x y_, - y x_,}{r^2}\varepsilon' = \left(\frac{x}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_n - \frac{y}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_n\right)\frac{n}{r^2}.$$

Man findet leicht, dass die vorher aufgezeichneten Werthe der Derivirten von $\frac{x}{r}\ \frac{y}{r}\ \frac{z}{r}$ diesen Gleichungen identisch genügen. Diese Derivirten genügen auch der Gleichung:

$$\frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' = 0.$$

Daraus folgt, dass die Gleichungen 10. in der That gleichbedeutend sind mit jenen Gleichungen 9.

Unter der Annahme eines veränderlichen ε zeigt sich das Integral der lebendigen Kraft in einer Form, welche kaum verschieden ist von dem für den Fall $\varepsilon' = 0$ aufgestellten. Zum Behufe der Herleitung empfiehlt es sich, von den ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung auszugehen:

$$\xi'' = \frac{dU}{d\xi}, \qquad \xi_{,}'' = \frac{dU}{d\xi_{,}}.$$

Das Integral der lebendigen Kraft erhält dann zunächst die Form:

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \xi_{,}'^2 + \eta_{,}'^2 + \zeta_{,}'^2 = 2U - a.$$

Zum Behufe der Transformation schreibt man alsdann die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}\xi'^2 + \xi_{,}'^2 &= (\xi' \cos\varepsilon - \xi_{,}' \sin\varepsilon)^2 + (\xi_{,}' \cos\varepsilon + \xi' \sin\varepsilon)\\ &= (x' + x_{,}\varepsilon')^2 + (x_{,}' - x\varepsilon')^2.\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der rechtwinkeligen Coordinaten verschiedener Achsen gegeneinander ergeben sich andere ähnliche Gleichungen. Mit deren Hilfe führt man das Integral der lebendigen Kraft über in:

$$(x' + x_{,}\varepsilon')^2 + (y' + y_{,}\varepsilon')^2 + (z' + z_{,}\varepsilon')^2 + (x_{,}' - x\varepsilon')^2 + (y_{,}' - y\varepsilon')^2 + (z_{,}' - z\varepsilon')^2 = 2U - a,$$

oder, indem man nach Potenzen von ε' ordnet, in:

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 + z'^2 + x_{,}'^2 + y_{,}'^2 + z_{,}'^2 + 2(x_{,}x' + y_{,}y' + z_{,}z' - xx_{,}' - yy_{,}' - zz_{,}')\varepsilon'&\\ + (x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon'^2 = 2U - a.&\end{aligned}$$

Um wieder Polarcoordinaten einzuführen, leite man aus 9. die folgende Gleichung her:

$$\begin{aligned}&(xy' - yx')^2 + (xz' - zx')^2 + (yz' - zy')^2\\ &+ \big((xy_{,} - yx_{,})(xy' - yx') + (xz_{,} - zx_{,})(xz' - zx') + (yz_{,} - zy_{,})(yz' - zy')\big)\, 2\varepsilon'\\ &+ \big((xy_{,} - yx_{,})^2 + (xz_{,} - zx_{,})^2 + (yz_{,} - zy_{,})^2\big)\varepsilon'^2 = n^2.\end{aligned}$$

Dieselbe lässt sich umwandeln in:

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2\\ &+ \big((x^2 + y^2 + z^2)(x_{,}x' + y_{,}y' + z_{,}z') - (xx_{,} + yy_{,} + zz_{,})(xx' + yy' + zz')\big)\, 2\varepsilon'\\ &+ \big((x^2 + y^2 + z^2)(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2) - (xx_{,} + yy_{,} + zz_{,})^2\big)\varepsilon'^2 = n^2.\end{aligned}$$

In dem zweiten Theile jeder dieser drei Zeilen lassen sich sofort Polarcoordinaten an die Stelle der rechtwinkeligen setzen. Indem man gleichzeitig durch r^2 theilt, gelangt man zu der neuen Gleichung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2(x_{,}x' + y_{,}y' + z_{,}z')\varepsilon' + (x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2)\varepsilon'^2 = (r' + r_{,}s\varepsilon')^2 + \frac{n^2}{r^2}.$$

Ebenso kann man die dem andern Massenpunkte entsprechende Gleichung herstellen:

$$x_{,}'^2 + y_{,}'^2 + z_{,}'^2 - 2(xx_{,}' + yy_{,}' + zz_{,}')\varepsilon' + (x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon'^2 = (r_{,}' - rs\varepsilon')^2 + \frac{n_{,}^2}{r_{,}^2}.$$

Das Integral der lebendigen Kraft erhält demnach die einfache Form:

11. $$\varrho^2 + \varrho_{,}^2 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_{,}^2}{r_{,}^2} = 2U - a,$$

wo man sich der folgenden Abkürzungen bedient hat:

$$r' + r_{,} s \dot{\varepsilon}' = \varrho\,, \qquad\qquad r_{,}' - r s \varepsilon' = \varrho_{,}\,.$$

§ 44. Die Differentialgleichungen der Bewegung in Polarcoordinaten ausgedrückt.

Auf Grund der obigen Aufstellungen in Betreff der neuen Polarcoordinaten gelangt man sehr leicht zu der Derivirten u'. Aus der Verbindung der Gleichungen 10. mit einander entsteht:

$$\left(\frac{y}{r}\right)'\sin\vartheta + \left(\frac{x}{r}\right)'\cos\vartheta = \left(\left(\frac{y}{r}\right)_{u}\sin\vartheta + \left(\frac{x}{r}\right)_{u}\cos\vartheta\right)\frac{n}{r^2} - \left(\frac{y_{,}}{r_{,}}\sin\vartheta + \frac{x_{,}}{r_{,}}\cos\vartheta - \left(\frac{y}{r}\sin\vartheta + \frac{x}{r}\cos\vartheta\right)s\right)\frac{r_{,}}{r}\,\varepsilon'$$

Auf der linken Seite schreibe man:

$$\left(\frac{y}{r}\right)'\sin\vartheta + \left(\frac{x}{r}\right)'\cos\vartheta = \left(\frac{y}{r}\sin\vartheta + \frac{x}{r}\cos\vartheta\right)' - \left(\frac{y}{r}\cos\vartheta - \frac{x}{r}\sin\vartheta\right)\vartheta'.$$

Wegen der identischen Gleichungen:

$$\frac{y}{r}\sin\vartheta + \frac{x}{r}\cos\vartheta = \cos u \qquad\qquad \frac{y}{r}\cos\vartheta - \frac{x}{r}\sin\vartheta = \cos i \sin u\,,$$

führt man alsdann die vorstehende über in:

$$\sin u\,(u' + \cos i\,\vartheta') = \sin u\,\frac{n}{r^2} + (\cos u_{,} - s\cos u)\,\frac{r_{,}}{r}\,\varepsilon'\,.$$

Da man den gemeinsamen Factor $\sin u$ streichen kann, so behält man zur Bestimmung von u' die einfache Gleichung:

12. $$u' + \cos i\,\vartheta' = \frac{n}{r^2} - \frac{ds}{du}\,\frac{r_{,}}{r}\,\varepsilon'\,.$$

Um auch die Derivirten ϑ' i' n' zu bestimmen, gehe man von den Gleichungen 2. des § 41 aus. Dieselben schreiben sich nun:

$$(n\sin i\sin\vartheta)' + (y_{,} z' - z_{,} y' + y z_{,}' - z y_{,}')\,\varepsilon' = \frac{y z_{,} - z y_{,}}{r r_{,}}\,\frac{dI}{ds}$$

$$(n\sin i\cos\vartheta)' + (x_{,} z' - z_{,} x' + x z_{,}' - z x_{,}')\,\varepsilon = \frac{x z_{,} - z x_{,}}{r r_{,}}\,\frac{dI}{ds}$$

$$(n\cos i)' \qquad + (x_{,} y' - y_{,} x' + x y_{,}' - y x_{,}')\,\varepsilon' = \frac{x y_{,} - y x_{,}}{r r_{,}}\,\frac{dI}{ds}\,.$$

Zum Behufe der weiteren Elimination der rechtwinkeligen Coordinaten benutze man ferner die identische Gleichung:

$$\frac{y_{,} z' - z_{,} y'}{r r_{,}} = \frac{y_{,}}{r_{,}}\left(\frac{z}{r}\right)' - \frac{z_{,}}{r_{,}}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{y_{,} z - z_{,} y}{r r_{,}}\,\frac{r'}{r}\,,$$

welche, mit Rücksicht auf die Gleichungen 10., übergeht in:

$$\frac{y_{,} z' - z_{,} y'}{r\, r_{,}} = \left(\frac{y_{,} z - z_{,} y}{r\, r_{,}}\right)_{n} \frac{n}{r^2} + \frac{y_{,} z - z_{,} y}{r\, r_{,}} \left(\frac{r'}{r} + \frac{r_{,}}{r}\, s\, \varepsilon'\right).$$

Die entsprechende Gleichung des andern Massenpunktes ist:

$$\frac{y\, z_{,}' - z\, y_{,}'}{r\, r_{,}} = \left(\frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}}\right)_{n_{,}} \frac{n_{,}}{r_{,}^2} + \frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}} \left(\frac{r_{,}'}{r_{,}} - \frac{r}{r_{,}}\, s\, \varepsilon'\right).$$

Ausserdem findet man noch andere ähnliche Gleichungen durch Vertauschen der nicht gleichnamigen Coordinaten gegen einander. Mit deren Hilfe führt man die obigen Gleichungen 2., nachdem man noch die Abkürzungen:

$$r' + r_{,}\, s\, \varepsilon' = \varrho \qquad\qquad r_{,}' - r\, s\, \varepsilon' = \varrho_{,}$$

darin aufgenommen hat, über in die folgenden:

$$(n \sin i \sin \vartheta)' = \left(\left(\frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}}\right)_{n} \frac{n\, r_{,}}{r} - \left(\frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}}\right)_{n_{,}} \frac{n_{,}\, r}{r_{,}}\right) \varepsilon' + \frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}} \left((r_{,}\, \varrho - r\, \varrho_{,})\, \varepsilon' + \frac{dU}{ds}\right)$$

13. $$(n \sin i \cos \vartheta)' = \left(\left(\frac{x\, z_{,} - z\, x_{,}}{r\, r_{,}}\right)_{n} \frac{n\, r_{,}}{r} - \left(\frac{x\, z_{,} - z\, x_{,}}{r\, r_{,}}\right)_{n_{,}} \frac{n_{,}\, r}{r_{,}}\right) \varepsilon' + \frac{x\, z_{,} - z\, x_{,}}{r\, r_{,}} \left((r_{,}\, \varrho - r\, \varrho_{,})\, \varepsilon' + \frac{dU}{ds}\right)$$

$$(n \cos i)' = \left(\left(\frac{x\, y_{,} - y\, x_{,}}{r\, r_{,}}\right)_{n} \frac{n\, r_{,}}{r} - \left(\frac{x\, y_{,} - y\, x_{,}}{r\, r_{,}}\right)_{n_{,}} \frac{n_{,}\, r}{r_{,}}\right) \varepsilon' + \frac{x\, y_{,} - y\, x_{,}}{r\, r_{,}} \left((r_{,}\, \varrho - r\, \varrho_{,})\, \varepsilon' + \frac{dU}{ds}\right).$$

Unter dem Beistande der beiden identischen Gleichungen:

$$(n \sin i \cos \vartheta)' \sin \vartheta - (n \sin i \sin \vartheta)' \cos \vartheta = - n \sin i\, \vartheta'$$

$$\frac{x\, z_{,} - z\, x_{,}}{r\, r_{,}} \sin \vartheta - \frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}} \cos \vartheta = \sin (i - i_{,}) \sin u \sin u_{,}\,,$$

indem man gleichzeitig die Flächenintegrale berücksichtigt, gelangt man zu der Störungsgleichung:

14. $$-\frac{n\, n_{,}}{c}\, \vartheta' = \left(\cos u \sin u_{,} \frac{n\, r_{,}}{r} - \sin u \cos u_{,} \frac{n_{,}\, r}{r_{,}}\right) \varepsilon' + \sin u \sin u_{,} \left((r_{,}\, \varrho - r\, \varrho_{,})\, \varepsilon' + \frac{dU}{ds}\right).$$

Im Weiteren bediene man sich der identischen Gleichungen:

$$(n \sin i \cos \vartheta)' \cos \vartheta + (n \sin i \sin \vartheta)' \sin \vartheta = (n \sin i)'$$

$$\frac{x\, z_{,} - z\, x_{,}}{r\, r_{,}} \cos \vartheta + \frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}} \sin \vartheta = - \sin i \sin u \cos u_{,} + \sin i_{,} \sin u_{,} \cos u$$

$$\frac{x\, y_{,} - y\, x_{,}}{r\, r_{,}} = - \cos i \sin u \cos u_{,} + \cos i_{,} \sin u_{,} \cos u\,,$$

und im Anschlusse an dieselben auch der identischen Gleichungen:

$$(n \cos i)' \sin i - (n \sin i)' \cos i = - n\, i'$$

$$\frac{x\, y_{,} - y\, x_{,}}{r\, r} \sin i - \left(\frac{x\, z_{,} - z\, x_{,}}{r\, r_{,}} \cos \vartheta + \frac{y\, z_{,} - z\, y_{,}}{r\, r_{,}} \sin \vartheta\right) \cos i = \sin (i - i_{,}) \cos u \sin u_{,}\,.$$

Man gelangt hierdurch zu der weiteren Störungsgleichung:

$$15. \qquad \frac{n n_,}{c}\,\frac{i'}{\sin i} = \left(\sin u \sin u_, \frac{n r_,}{r} + \cos u \cos u_, \frac{n_, r}{r_,}\right)\varepsilon' - \cos u \sin u_, \left((r_, \varrho - r \varrho_,)\varepsilon' + \frac{dU}{ds}\right).$$

Um auch die Derivirte n' zu erhalten, schreibe man schliesslich noch die beiden identischen Gleichungen:

$$(n \cos i)' \cos i + (n \sin i)' \sin i = n'.$$

$$\frac{x y_, - y x_,}{r r_,} \cos i + \left(\frac{x z_, - z x_,}{r r_,} \cos \vartheta + \frac{y z_, - z y_,}{r r_,} \sin \vartheta\right) \sin i = \frac{ds}{du}.$$

Man findet die verlangte Störungsgleichung:

$$16. \qquad n' = -\left(s \frac{n r_,}{r} + \frac{d^2 s}{du\, du_,} \frac{n_, r}{r_,}\right)\varepsilon' + \frac{ds}{du}\left((r_, \varrho - r \varrho_,)\varepsilon' + \frac{dU}{ds}\right).$$

Es bleibt nur noch übrig, jene Differentialgleichung der zweiten Ordnung aufzustellen, durch welche sich der Leitstrahl bestimmt. Durch zweimaliges Differentiiren der Gleichung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ erhält man:

$$r r'' + r'^2 + x x'' + y y'' + z z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Wegen der Gleichungen 1. des § 40 führt man dies über in:

$$r r'' + r'^2 = -(x x_, + y y_, + z z_,)\varepsilon'' - 2(x x_,' + y y_,' + z z_,')\varepsilon' + (x_,^2 + y_,^2 + z_,^2)\varepsilon'^2$$
$$+ x'^2 + y'^2 + z'^2 + x \frac{dU}{dx} + y \frac{dU}{dy} + z \frac{dU}{dz}.$$

An die Stelle der rechtwinkeligen Coordinaten kann man nun leicht die Polarcoordinaten setzen. Man benütze die im § 43 gefundene Gleichung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2(x_, x' + y_, y' + z_, z')\varepsilon' + (x_,^2 + y_,^2 + z_,^2)\varepsilon'^2 = \varrho^2 + \frac{n^2}{r^2}.$$

und die Differentialgleichung zur Bestimmung von r geht über in:

$$17. \qquad r r'' + r'^2 + r r_, s \varepsilon'' + 2(r r_, s)' \varepsilon' + (r_,^2 - r^2)\varepsilon'^2 = \varrho^2 + \frac{n^2}{r^2} + r \frac{dU}{dr}.$$

Die Bewegung der Masse m, unter der Annahme, dass ε eine unbestimmte Funktion der Zeit sei, lässt sich nun durch das System der Differentialgleichungen 12. 14. 15. 16. 17. bestimmen.

Man denke sich an die Stelle von ε eine bestimmte Funktion der Veränderlichen eingesetzt. Dem Brennpunkte der von der Masse m beschriebenen Ellipse ist dann eine bestimmte in der Ebene der drei Körper beschriebene Bahn vorgezeichnet, welche gleichfalls auf eine bewegliche Ellipse zurückgeführt wird, während derselbe unter der Annahme $\varepsilon = 0$ jederzeit mit dem Orte des Centralkörpers zusammenfällt. Es versteht sich, dass die gestörten Elemente jetzt anders ausfallen als unter der Annahme $\varepsilon = 0$. Die in solcher Weise geänderte Bahn des gestörten Körpers bestimmt sich durch das vorliegende System Differentialgleichungen. Die Derivirten i' und ϑ' sind unmittelbar gegeben. Diejenigen Störungsgleichungen, aus welchen sich die Elemente p und ω bestimmen, lassen sich hier ebenso herleiten, wie oben für den Fall $\varepsilon' = 0$ geschehen ist.

Ich habe das vorliegende System Differentialgleichungen schon im Jahre 1869 veröffentlicht (Astronomische Nachrichten No. 1758), und dort die merkwürdige Eigenschaft desselben hervorgehoben, der zufolge die kanonische Form der drei Flächenintegrale Bestand hat.

Es ist weiter bemerkenswerth, dass in den vorliegenden Gleichungen die Derivirten ε' und ε'' jedesmal mit dem sinus oder dem cosinus eines veränderlichen Winkels multiplicirt sind. Indem man die Kräftefunktion nach Potenzen von $\frac{\varepsilon}{r_\prime}$ entwickelt, gelangt man zu Gliedern, welche mit Potenzen von ε multiplicirt sind. Unter diesen Gliedern haben zum wenigsten die mit der ersten Potenz von ε multiplicirten gleichfalls den sinus oder den cosinus eines veränderlichen Winkels zum Factor. Daraus folgt, dass alle diejenigen Glieder, welche nach ε und deren Derivirten linear sind, und welche also mit Rücksicht auf ihren Zahlenwerth vor den übrigen von ε abhängigen Gliedern zuerst in Betracht kommen, die Eigenschaft besitzen, dass sie periodisch wiederkehrend verschwinden. Man kann sich nun ein Urtheil bilden über den Einfluss der Veränderlichen ε auf die gestörten Elemente. Man sieht, dass sich derselbe immer nur auf solche Glieder der gestörten Elemente erstreckt, deren Derivirten gleichfalls diesen periodischen Factor haben. Aus diesem Grunde ist es unmöglich, obgleich man die Grösse ε als willkürliche Veränderliche in die Störungsgleichungen eingeführt hat, irgend eines der gestörten Elemente einer Beständigen gleich zu setzen. Wollte man die veränderlichen Glieder dieses Elementes ausnahmslos wegschaffen, auch diejenigen, deren Derivirten jenen periodischen Factor nicht haben, so würde sich ein Werth ε ergeben, welcher wegen des darin vorkommenden periodischen Nenners zeitweise unendlich gross ist. Dies widerstreitet aber den Anforderungen der Störungstheorie. Zu einem derartigen Resultate ist man schon oben im § 42 gelangt, wo man den Leitstrahl des gestörten Körpers in die Richtung der resultirenden Anziehung gebracht hat. Diese Annahme hat die Unveränderlichkeit der beiden Elemente θ und i zur Folge gehabt.

§ 45. Ueber die Art der Verwendung der veränderlichen Focodistanz in der Theorie des Mondes.

In der weiteren Untersuchung werde ich die dem Falle $\varepsilon = 0$ entsprechenden Störungsgleichungen wieder zum Ausgangspunkte nehmen. Von diesen Störungsgleichungen ausgehend, habe ich in dem vierten Abschnitte die ersten Näherungen der Mondstörungen entwickelt. Die Methode der successiven Substitution verlangt, dass man die erste Näherung des Elementes in die Störungsgleichung einsetze, und den noch unbekannten Bestandtheil desselben als neue Veränderliche auffasse. Man erreicht hierdurch den Vortheil, dass an die Stelle des gestörten Elementes ein anderes tritt, dessen Variation eine kleine Grösse der zweiten Ordnung ist. Wenn nun aber die Umwandlung, welche das gestörte Element bei dem Uebergange zu jener allgemeinen linearen Transformation erfährt, mit der hier besprochenen Transformation zusammenfällt, so versteht es sich, dass von diesen beiden Transformationen die eine als Stellvertreter der andern angesehen werden kann. Es ist hiermit der Weg angedeutet, auf welchem die veränderliche Focodistanz in der Störungstheorie eine Verwendung finden kann.

Durch die Einführung des veränderlichen ε in die Störungsgleichungen erfährt übrigens nicht ein einzelnes unter den gestörten Elementen eine Umwandlung; es sind gleichzeitig alle übrigen Elemente in Mitleidenschaft gezogen. Insofern nun die hierdurch bewirkte Umwandlung der gestörten Elemente in dem Sinne jener andern Transformation ausfällt, da nämlich durch die Einführung des veränderlichen ε die andere Transformation in jedem einzelnen Elemente, wenn auch nur theilweise zum Vollzug kommt, insofern nebenbei die Einführung des veränderlichen ε nicht gerade schwieriger zu bewerkstelligen ist als die auf die Methode der successiven Substitution gegründete Transformation, dürfte wohl die allgemeine

lineare Transformation der rechtwinkeligen Coordinaten als ein Hilfsmittel zu betrachten sein, durch welches die zu den Störungen höherer Ordnung führenden Rechnungen gefördert werden können.

In den ursprünglichen dem Falle $\varepsilon = 0$ entsprechenden Störungsgleichungen führe ich auf der rechten Seite diejenigen Transformationen aus, welche in der Verallgemeinerung der linearen Transformation ihren Grund haben. An die Stelle jener Coordinaten, welche für den Fall $\varepsilon = 0$ angenommen sind, setze ich die neuen dem veränderlichen ε entsprechenden Coordinaten. In § 1 sind die rechtwinkeligen Coordinaten des kanonischen Systems für den Fall $\varepsilon = 0$ durch $\xi\, \eta\, \zeta\, \xi_,\, \eta_,\, \zeta_,$ bezeichnet, und in dem Weiteren sind die folgenden Gleichungen aufgestellt worden:

$$
18. \qquad
\begin{aligned}
\xi &= x \cos\varepsilon + x_, \sin\varepsilon & \qquad \xi_, &= x_, \cos\varepsilon - x \sin\varepsilon \\
\eta &= y \cos\varepsilon + y_, \sin\varepsilon & \qquad \eta_, &= y_, \cos\varepsilon - y \sin\varepsilon \\
\zeta &= z \cos\varepsilon + z_, \sin\varepsilon & \qquad \zeta_, &= z_, \cos\varepsilon - z \sin\varepsilon \,.
\end{aligned}
$$

Das kanonische System, welches dem Falle $\varepsilon = 0$ entspricht, wird demnach in das neue der allgemeineren linearen Transformation entsprechende System übergeführt, indem man an die Stelle der anfänglichen Coordinaten Funktionen der neuen Coordinaten und von ε einsetzt. In gleicher Weise lassen sich die für den Fall $\varepsilon = 0$ angenommenen Polarcoordinaten als Funktion der neuen Polarcoordinaten und von ε darstellen. Da man die letzteren mit $r\, u\, \vartheta\, i$ bezeichnet hat, so mögen die ersteren, welche sich als Funktion davon und von ε darstellen lassen, mit $r_,\, u_,\, i_,\, \vartheta_,$ bezeichnet sein. Indem man die Veränderlichen r und u an die Stelle der entsprechenden $r_,$ und $u_,$ bringt, erhalten auch die neuen Elemente p und ω, welche die Stelle der ursprünglichen $p_,$ und $\omega_,$ vertreten sollen, Eingang in die Störungsgleichungen. Die Störungsglieder zeigen sich dann als Funktion der Veränderlichen v und r, und der neuen Elemente $p\, \omega\, i\, \vartheta$.

Ich gehe nun von der Voraussetzung aus, dass die endlichen Gleichungen bekannt seien, durch welche sich die ursprünglichen Elemente $p_,\, \omega_,\, i_,\, \vartheta_,$ als Funktion der neuen und von ε darstellen. Es wird sich demnächst zeigen, dass deren Herleitung nicht, wie man vermuthen dürfte, von weiteren Integrationen abhängt. Es ist leicht zu sehen, dass unter dieser Voraussetzung die vollständige Integration der in der beschriebenen Weise transformirten Störungsgleichungen durchgeführt werden kann, und man also aus diesen Störungsgleichungen die genauen Werthe der ursprünglichen Elemente $q_,\, \sigma_,\, \tau_,\, \omega_,\, i_,\, \vartheta_,$ erhält. Nachdem man über die Veränderliche ε irgend wie verfügt hat, kann man durch die Integration die ersten Näherungen dieser Elemente als Funktion der Veränderlichen v und r, und der neuen Elemente $p\, \omega\, i\, \vartheta$ herleiten. Vermittelst der vorerwähnten Gleichungen findet man daraus die ersten Näherungen der neuen Elemente, und es steht Nichts im Wege, auch die Störungsglieder zweiter Ordnung als Funktion der Veränderlichen v und r, und der neuen Elemente $p\, \omega\, i\, \vartheta$ darzustellen, um alsdann zu deren Integration schreiten zu können. Für den Fall, dass in dieser Absicht die erste Näherung des neuen Elementes nicht substituirt werden darf, weil gemäss der im § 28 gegebenen Vorschrift die Methode der variirten Näherung angewendet werden soll, hat man Veranlassung, auf den vorigen Paragraphen zurückzukommen, in welchem die Derivirten der neuen Elemente aufgestellt sind.

In dem vorigen Paragraphen ist gezeigt worden, wie man zu denjenigen Störungsgleichungen gelangt, durch deren Integration die neuen Elemente unmittelbar bestimmt werden können. Wollte man dies neue System von Störungsgleichungen in der Theorie des Mondes zum Ausgangspunkte nehmen, so würde es sich vor Allem wieder darum handeln, die Funktion ε ausfindig zu machen, durch welche den gestörten Elementen die etwa beabsichtigte Umwandlung gegeben wird. Nachdem man diesen Werth ε in die Störungsgleichungen eingesetzt hat, könnte man sofort zu deren Integration schreiten. Die

ursprünglichen Elemente, welche bekannt sein müssen, wenn man sich der Coordinatenwerthe des § 30 bedienen will, um den Ort des gestörten Körpers zu berechnen, sind der Voraussetzung gemäss als Funktion der neuen Elemente und von ε gegeben. Es ist hiermit offenbar ein zweiter Weg angedeutet, auf welchem die Veränderliche ε in der Lösung des Problems eine Verwendung finden könnte.

Die nun mehrfach erwähnten Gleichungen, welche zwischen den ursprünglichen Elementen und den neuen bestehen, als bekannt voraussetzend, kann man leicht die neuen Störungsgleichungen aus den ursprünglichen dem Falle $\varepsilon = 0$ entsprechenden herleiten. Dazu bedarf es nur, dass man in den letzteren ausser den vorhin auf der rechten Seite ausgeführten Transformationen auf der linken Seite noch die Derivirte des ursprünglichen Elementes durch die Derivirte des neuen und durch die Derivirten ε' und ε'' ausdrücke. Ebenso leicht kann man auch von den neuen Störungsgleichungen auf die ursprünglichen wieder zurückkommen. Um dies zu bewerkstelligen, muss man eine theilweise Integration verschiedener von ε abhängiger Störungsglieder ausführen. Sobald man aber einmal diesen Zusammenhang zwischen dem einen und dem andern Systeme erkannt hat, sieht man sich sofort veranlasst, wenn etwa die Absicht vorlag, die Integration der neuen Störungsgleichungen auszuführen, dies wieder aufzugeben. Man sieht nämlich, dass hier die erheblich vermehrten Integrationsschwierigkeiten anderseits nicht durch einen entsprechenden Gewinn wieder aufgewogen werden.

Um nicht von denjenigen Bestandtheilen zu reden, welche auch sonst noch in den neuen Störungsgleichungen enthalten, den ursprünglichen Störungsgleichungen aber fremd sind, will ich nur darauf hinweisen, dass die mit der Derivirten ε' multiplicirten Glieder zum Theil wenigstens das Element n zum Factor haben. Dieses Element kommt in den ursprünglichen Störungsgleichungen nirgends vor, so lange es sich nicht um die Bestimmung eines andern als der Elemente q, σ τ handelt. Es ist ferner im § 11 gezeigt worden, dass die erste Näherung von n ebenso wie die von p erst dann angegeben werden kann, nachdem man die ersten Näherungen von q, σ τ aufgefunden hat. Die neuen Störungsgleichungen besitzen demnach nicht mehr die für die Vereinfachung der Integrationsarbeit so wichtige Eigenschaft, wonach die vier Grössen p ω i ϑ die einzig vorkommenden gestörten Elemente sind. Zu diesen gesellt sich noch das fünfte n hinzu. Die Anwesenheit von n verursacht eine Vermehrung der Integrationsarbeit, welche den Gedanken nicht aufkommen lässt, dass es vortheilhafter sein könne, anstatt jener ursprünglichen der Annahme $\varepsilon = 0$ entsprechenden Störungsgleichungen die neuen des vorigen Paragraphen zu gebrauchen.

In dem Bisherigen ist mehrfach darauf hingewiesen worden, dass die Differentialgleichungen der rechtwinkeligen Coordinaten, welche einem veränderlichen ε entsprechen, nicht mehr die kanonische Form haben, dass diese nur dann fortbesteht, wenn $\varepsilon' = 0$ gesetzt, also ε als willkürliche Beständige angenommen ist. Anderseits hat man gesehen, dass jene einfachen Flächenintegrale nicht an die kanonische Form der Differentialgleichungen gebunden sind, dass dieselben vielmehr auch für das unbestimmte veränderliche ε Geltung haben. Dagegen kommen unter der Annahme eines veränderlichen ε fünf gestörte Elemente in den Störungsgleichungen vor, während für den Fall $\varepsilon' = 0$ deren Anzahl auf vier beschränkt ist. Die Eigenschaft der Störungsgleichungen, wonach nur vier gestörte Elemente unter dem Integralzeichen vorkommen, geht hiernach gleichzeitig mit der kanonischen Form verloren. Diese Eigenschaft gibt demnach den richtigen Maassstab zur Beurtheilung der Vortheile, welche aus der kanonischen Form der Integration der Störungsgleichungen erwachsen.

§ 46. Transformation der Störungsglieder vermittelst der veränderlichen Focodistanz.

In der Theorie des Mondes können die Gleichungen 18. des vorigen Paragraphen wegen der Kleinheit von ε einfacher geschrieben werden. Der Werth ε darf nämlich eine gewisse Grenze nicht überschreiten, wenn die lineare Transformation mit den Forderungen der Störungstheorie nicht in Widerspruch gerathen soll. Jener Aenderung, welche der Leitstrahl $r_{,}$ erfährt, während er in den neuen Leitstrahl r übergeht, sind beiläufig dieselben Grenzen vorgezeichnet, innerhalb deren sich die Variation des Leitstrahls in der gestörten Bahn bewegt. Aus den zur Linken stehenden Gleichungen 18. findet man:

$$r_{\prime}^2 = r^2 \cos^2 \varepsilon + 2\, r\, r_{,}\, \varepsilon \cos \varepsilon \sin \varepsilon + r_{,}^2 \sin^2 \varepsilon .$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Ausdruck $\frac{r_{,}}{r}$ sin ε eine kleine Grösse der ersten Ordnung sein muss. Indem man abkürzend $\frac{r_{,}}{r} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{r_{0}}{r_{0}}$ setzt, wo beiläufig $m = \frac{1}{80}$ und $\frac{r_0}{r_0} = \frac{1}{400}$ ist, findet man $\frac{r_{,}}{r} = 3600$. Nimmt man nun an, dass die grössten der in der Störung des Leitstrahls vorkommenden Glieder den Bruchwerth $\frac{1}{100}$ darstellen, so ist die Grenze, welche der Werth ε nicht überschreiten soll, durch den kleinen Bruchwerth $\frac{1}{360000}$ bezeichnet.

Wegen der Kleinheit von ε ist es gestattet, $\sin \varepsilon = \varepsilon$ und $\cos \varepsilon = 1$ zu setzen. Dies gilt für die zur Linken stehenden Gleichungen 18. In den rechts stehenden darf $\varepsilon = 0$ gesetzt werden. Denn die Grösse $\frac{r}{r_{,}}\, \varepsilon$, neben der Einheit betrachtet, verschwindet vollständig. Nimmt man wie vorhin den Werth $\frac{r_{,}}{r}\, \varepsilon = \frac{1}{100}$ an, so ist $\frac{r}{r_{,}}\, \varepsilon = \frac{1}{100}\left(\frac{r}{r_{,}}\right)^2 = \frac{1}{1\,300\,000\,000}$. Man behält demnach die einfacheren Gleichungen:

19. $$\xi = x + x_{,}\,\varepsilon \qquad \xi_{,} = x_{,}$$
$$\eta = y + y_{,}\,\varepsilon \qquad \eta_{,} = y_{,}$$
$$\zeta = z + z_{,}\,\varepsilon \qquad \zeta_{,} = z_{,}\,.$$

Man kann nun leicht einige der dem Falle $\varepsilon = 0$ entsprechenden Polarcoordinaten als Funktion der neuen dem veränderlichen ε entsprechenden und von ε darstellen. Setzt man abkürzend $\frac{r_{,}}{r}\, \varepsilon = \eta$, wo nun η eine kleine Grösse der ersten Ordnung ist, so schreibt sich die vorhin aufgestellte Gleichung einfacher:

20. $$r_{\prime}^2 = r^2 (1 + 2\, x\, \eta + \eta^2)\,.$$

Durch diese Gleichung ist der Leitstrahl $r_{\prime}$ als Funktion von $r\ s\ \eta$ bestimmt.

Indem man die Polarcoordinaten, welche in der Theorie des Mondes die Vereinfachung $i_{\prime\prime} = 0$ und $i_{,} = 0$ gestatten, in die obigen Gleichungen 19. einsetzt, erhält man aus den rechts stehenden neben $r_{\prime\prime} = r_{,}$ noch die Gleichung $u_{\prime\prime} + \vartheta_{\prime} = u + \vartheta$. Hierdurch sind die Veränderlichen $r_{\prime\prime}$ und $u_{\prime\prime}$ als Funktion von $r_{,}$ und $u_{,}$ bestimmt.

Die links stehenden Gleichungen 19. werden durch die Einführung der Polarcoordinaten umgewandelt in:

$$r_s(\cos\vartheta_s \cos u_s - \cos i_s \sin\vartheta_s \sin u_s) = r(\cos\vartheta \cos u - \cos i \sin\vartheta \sin u) + r_, \varepsilon \cos(u_, + \vartheta)$$

21. $$r_s(\sin\vartheta_s \cos u_s + \cos i_s \cos\vartheta_s \sin u_s) = r(\sin\vartheta \cos u + \cos i \cos\vartheta \sin u) + r_, \varepsilon \sin(u_, + \vartheta)$$

$$r_s \sin i_s \sin u_s = r \sin i \sin u\,.$$

Mit deren Hilfe kann man die Veränderliche u_s durch die entsprechende neue Veränderliche auf mehrfache Weise ausdrücken.

Wenn die zufolge der Methode der successiven Substitution auszuführende Transformation eines Elementes mit der aus der Einführung des veränderlichen ε sich ergebenden Transformation zusammenfällt, so dürfte die Kürze der Rechnung allein schon ein Anlass sein, den letzteren Weg einzuschlagen. Man bemerke vor Allem, dass die Störungsfunktion nur die drei Veränderlichen r_s $r_{,s}$ s_s enthält. Eine Funktion der gestörten Elemente ist dieselbe nur in sofern als an die Stelle der genannten drei Veränderlichen bestimmte Funktionen von r und $r_,$ und der gestörten Elemente eingeführt werden müssen. Zur Elimination der zwei erstgenannten Veränderlichen liegen die beiden Gleichungen vor:

$$r_s^2 = r^2(1 + 2s\eta + \eta^2) \qquad \text{und } r_{,s} = r_,\,.$$

Die Veränderliche s_s lässt sich durch die Gleichungen 21. bestimmen. Aus den zwei ersten der Gleichungen 21. eliminire man das Einemal $\sin u_s$, das Anderemal $\cos u_s$. Man erhält an deren Statt die beiden:

$$r_s \cos u_s = r\Big(\cos(\vartheta - \vartheta_s)\cos u - \cos i \sin(\vartheta - \vartheta_s)\sin u\Big) + r_,\varepsilon \cos(u_, + \vartheta - \vartheta_s)$$

22. $$r_s \cos i_s \sin u_s = r\Big(\sin(\vartheta - \vartheta_s)\cos u + \cos i \cos(\vartheta - \vartheta_s)\sin u\Big) + r_,\varepsilon \sin(u_, + \vartheta - \vartheta_s)\,.$$

Mit Rücksicht darauf, dass $u_{,s} = u_, + \vartheta - \vartheta_s$ ist, gelangt man zu einem sehr einfachen Werthe s_s. Man multiplicire die letztere Gleichung mit $\cos u_{,s}$, die andere mit $\sin u_{,s}$, und es entsteht durch die Addition die Gleichung:

$$r_s(\cos u_s \cos u_{,s} + \cos i_s \sin u_s \sin u_{,s}) = r(\cos u \cos u_, + \cos i \sin u \sin u_,) + r_,\,\varepsilon\,,$$

welche sich auch in der folgenden Form anschreiben lässt:

23. $$r_s s_s = r(s + \eta)\,.$$

Man kann hierdurch leicht die Veränderliche s_s in den Störungsgliedern eliminiren.

Mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen führt man ohne Weiteres die beabsichtigte Transformation in den drei folgenden Störungsgleichungen aus:

II. $$-\tau_s' = \frac{r_s}{p_s}\cos v\left(\Omega_s - r_,\frac{d\Omega_s}{dr_,} - q_{,s} + P_s\right)$$

III. $$\sigma_s' = \frac{r_s}{p_s}\sin v\left(\Omega_s - r_,\frac{d\Omega_s}{dr_,} - q_{,s} + P_s\right) + \frac{3}{2}\,\frac{ae}{1 - e^2}.$$

IV. $$-p_s^2\left(\omega'_s - 2\sin^2\frac{i_s}{2}\,\vartheta_s'\right) = \left(2\,\frac{p_s}{r_s}(\tau_s \sin v - \sigma_s \cos v) - s \sin v(\tau_s \cos v + \sigma_s \sin v)\right)'$$

$$+ \Omega_s - 2r_,\frac{d\Omega_s}{dr_,} - \frac{3}{2}(q_{,s} + a) + P_s + N_s\,.$$

In § 31 ist die Entwicklung der Störungsfunktion aufgestellt worden:

$$\Omega_s = \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 r_s^2 \left(3\,s_s^2 - 1 + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r_s}{r_,}(5\,s_s^3 - 3\,s_s) + \frac{1}{4\,m}\left(\frac{r_s}{r_,}\right)^2 (35\,s_s^4 - 30\,s_s^2 + 3)\right).$$

Da man in dem dritten Gliede der Störungsfunktion die von η abhängigen Glieder streichen darf, so entsteht durch die Elimination von r_s und s_s die transformirte Störungsfunktion:

$$\Omega_s = \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2 r^2 \Big(3\,(s+\eta)^2 - (1 + 2\,s\,\eta + \eta)^2 + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\big(5\,(s+\eta)^3 - 3\,(s+\eta)(1 + 2\,s\,\eta + \eta^2)\big)$$
$$+ \frac{1}{4m}\left(\frac{r}{r_,}\right)^2 (35\,s^4 - 30\,s^2 + 3)\Big).$$

Wenn man den neuen Parameter p an die Stelle von p_s treten lässt, so erhält die Grösse P_s, welche in den obigen Störungsgleichungen vorkommt, eine wenig einfache Gestalt. Es finden sich unten noch andere Gründe, durch welche man veranlasst sein könnte, anstatt des neuen Parameters p den Parameter p_s des kanonischen Systems beizubehalten, und also die Elimination der ursprünglichen Polarcoordinaten auf die einzige s_s zu beschränken. Um in diesem Sinne die Störungsfunktion durch die Veränderlichen r_s und s auszudrücken, schreibt man etwas einfacher:

$$\Omega_s = \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^2 \left(3\,r^2(s^2-1) + 2\,r_s^2 + \frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}(s+\eta)\left(5\,r^2(s^2-1) + 2\,r_s^2\right) + \frac{1}{4\,m}\,\frac{r^4}{r_,^2}(35\,s^4 - 30\,s^2 + 3)\right),$$

wo nebenbei zur Elimination von r noch die Gleichung $r_s^2 = r^2(1 + 2\,s\,\eta + \eta^2)$ zu verwenden ist.

Zum Behufe der Transformation der Störungsgleichung:

I. $$\frac{1}{2}\,q'_{,s} = \frac{d\Omega_s}{ds_s}\,\frac{ds_s}{du_{,s}}\,\frac{n_,}{r_,^2} + \frac{d\Omega_s}{dr_,}\,r_,'$$

sind wegen des dem ersten Gliede rechts beigefügten Factors $\frac{ds_s}{du_{,s}}$ die bis dahin aufgestellten Gleichungen nicht ausreichend. Man multiplicire die erstere der Gleichungen 22. mit $\sin u_{,s}$, die andere mit $\cos u_{,s}$, um dieselben alsdann von einander abzuziehen. Es entsteht:

$$r_s(\cos u_s \sin u_{,s} - \cos i_s \sin u_s \cos u_{,s}) = r\,(\cos u \sin u_, - \cos i \sin u \cos u_,),$$

oder auch die einfache Gleichung:

24. $$r_s\,\frac{ds_s}{du_{,s}} = r\,\frac{ds}{du_,}.$$

Ferner hat man die Entwicklung:

$$\frac{d\Omega_s}{ds_s} = \lambda^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 r_s^2 \left(3\,s_s + \frac{3}{2}\,\frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r_s}{r_,}(5\,s_s^2 - 1) + \frac{5}{2m}\left(\frac{r_s}{r_,}\right)^3 (7\,s_s^3 - 3\,s_s)\right).$$

Durch die Einführung der neuen Polarcoordinaten erhält man alsdann:

$$\frac{d\Omega_s}{ds_s}\,\frac{ds_s}{du_{,s}} = \lambda^2\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 \frac{ds}{du_,}\left(3\,r^3(s+\eta) + \frac{3}{2}\,\frac{1-m}{\sqrt{m}}\,\frac{r}{r_,}\left(5\,r^2(s^2-1) + 4\,r_s^2\right) + \frac{5}{2m}\,\frac{r^4}{r_,^2}(7\,s^3 - 3\,s)\right).$$

Auch die Transformation der beiden noch übrigen Störungsgleichungen:

$$\text{V.} \qquad -n_0\, i_0' = \sin i_0 \cos u_0 \sin u_{,0} \frac{d\Omega_0}{ds_0}$$

$$\text{VI.} \qquad -n_0\, \vartheta_0' = \qquad \sin u_0 \sin u_{,0} \frac{d\Omega_0}{ds_0}$$

erfordert eine weitere Vorbereitung. Auf die obigen Gleichungen 21. und 22. zurückkommend schreibe ich:

$$r_0 \cos u_0 = r\left(\cos(\vartheta - \vartheta_0)\cos u - \cos i \sin(\vartheta - \vartheta_0)\sin u\right) + r, \varepsilon \cos u_{,0}$$

$$r_0 \cos i_0 \sin u_0 = r\left(\sin(\vartheta - \vartheta_0)\cos u + \cos i \cos(\vartheta - \vartheta_0)\sin u\right) + r, \varepsilon \sin u_{,0}$$

$$r_0 \sin i_0 \sin u_0 = r \sin i \sin u \,.$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit $\cos i$, die dritte mit $\sin i \cos(\vartheta - \vartheta_0)$, und addirt man dieselben, so entsteht:

$$r_0\left(\cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)\right)\sin u_0 = r\left(\cos i \sin(\vartheta - \vartheta_0)\cos u + \cos(\vartheta - \vartheta_0)\sin u\right) + r, \varepsilon \cos i \sin u_{,0} \,.$$

Man findet leicht die identische Gleichung:

$$\cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) = \cos(i - i_0)\cos^2\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} + \cos(i + i_0)\sin^2\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{i - i_0}{2}\cos^2\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} - 2\sin^2\frac{i + i_0}{2}\sin^2\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \,.$$

Um die Werthe der drei letzten Glieder miteinander zu vergleichen, bemerke man, dass $\vartheta - \vartheta_0$ eine kleine Grösse der ersten Ordnung ist, und ebenso auch das Verhältniss $\sin\frac{i - i_0}{2} : \sin\frac{i + i_0}{2}$. Mit Rücksicht auf die in den Integralen der Störungsgleichungen V. und VI. zu erzielende Genauigkeit darf man die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite der vorliegenden Gleichung streichen. Die vorstehende Gleichung schreibt sich dann einfacher:

$$r_0 \sin u_0 = r\left(\cos i \sin(\vartheta - \vartheta_0)\cos u + \cos(\vartheta - \vartheta_0)\sin u\right) + r, \varepsilon \cos i \sin u_{,0} \,.$$

Man kann diese Gleichung, und ebenso auch die erste der oben angesetzten drei Gleichungen noch weiter vereinfachen. Durch die Einführung eines Hilfswinkels kann man den Coefficienten von r in diesen beiden Gleichungen eingliederig machen. Setzt man:

$$\cos(\vartheta - \vartheta_0) = \varrho \cos(\vartheta - \vartheta_0 - \varphi) \,, \qquad \cos i \sin(\vartheta - \vartheta_0) = \varrho \sin(\vartheta - \vartheta_0 - \varphi) \,,$$

so ergeben sich, vgl. § 29, zur Bestimmung von ϱ und φ die beiden Gleichungen:

$$\varrho^2 = 1 - \sin^2 i \sin^2(\vartheta - \vartheta_0) \,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta - \vartheta_0)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{i}{2}\cos 2(\vartheta - \vartheta_0)} \,;$$

und mit Rücksicht auf die obige Bemerkung, dass $\sin^2 i \sin^2(\vartheta - \vartheta_0)$ neben der Einheit gestrichen werden darf, die einfacheren Werthe:

$$\varrho^2 = 1\,, \qquad \varphi = \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta - \vartheta_s)\,.$$

Die beiden Gleichungen schreiben sich demnach in der Form:

25.
$$r_s \cos u_s = r\cos\left(u + \vartheta - \vartheta_s - \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta - \vartheta_s)\right) + r_, \varepsilon \cos u_{,s}$$
$$r_s \sin u_s = r\sin\left(u + \vartheta - \vartheta_s - \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta - \vartheta_s)\right) + r_, \varepsilon \cos i \sin u_{,s}\,.$$

Mit deren Hilfe hat man die Factoren $\cos u_s$ und $\sin u_s$ in den Störungsgleichungeu V. und VI. zu climiniren.

Die Vereinfachungen, welche die lineare Transformation wegen der geringen Grösse von ε erfahren hat, sind der Störungsfunktion zu Gute gekommen; dieselben sind aber nicht so ohne Weiteres auch bei der Transformation der Kräftefunktion zulässig. Es ist:

$$U_s = \frac{p_0{}^3}{r_s} + \frac{\lambda^2 p_,{}^3}{r_{,s}} + \Omega_s\,.$$

In den der Störungsfunktion beigefügten Gliedern darf man wieder $r_s{}^2 = r^2(1 + 2\,s\,\eta + \eta^2)$ schreiben. Dagegen ist die Gleichnng $r_{,s} = r_,$ uicht mehr zulässig, weil das zweite von $r_,$ abhängige Glied von U_s einen verhältnissmässig sehr grossen Werth hat. Man fiudet den vollständigen Werth:

$$r_{,s}{}^2 = r_,{}^2\cos^2\varepsilon - 2\,r_,\,r\,s\cos\varepsilon\sin\varepsilon + r^2\sin^2\varepsilon\,.$$

Um auch jetzt, so weit als möglich, zu vereinfachen, schreibt man:

$$r_{,s} = r_,\cos\varepsilon - r\,s\sin\varepsilon\,, \qquad \text{oder auch} \quad \frac{1}{r_{,s}} = \frac{1}{r_,}\left(\frac{1}{\cos\varepsilon} + \frac{rs}{r_,}\,\varepsilon\right),$$

wo noch $\frac{1}{\cos\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$ gesetzt werden darf. Hierdurch ist man in den Stand gesetzt, die Entwicklung der Kräftefunktion U_s auf die der Störungsfunktion Ω_s zurückzuführen. Es ist:

$$U_s = \frac{p_0{}^3}{r\sqrt{1 + 2\,s\,\eta + \eta^2}} + \frac{\lambda^2 p_,{}^3}{r_,}\left(1 + \left(\frac{r}{r_,}\right)^2 s\,\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_,}\right)^2\eta^2\right) + \Omega_s\,.$$

Es ist nun auch die Entwicklung jener allgemeinen Form der Kräftefunktion des § 31, welche sich als Funktion der unbestimmten Grösse ε darstellt, aus der dem Falle $\varepsilon = 0$ entsprechenden Entwicklung hergeleitet. Eine Verwendung findet diese allgemeinere Entwicklung in dem Systeme der Differentialgleichungen des § 44.

§ 47. Die ursprünglichen Elemente der Störung als Funktion der neuen Elemente und der Focodistanz.

Da man nun die dem Falle $\varepsilon = 0$ entsprechenden Polarcoordinaten durch die neuen, der allgemeinen linearen Transformation entsprechenden, ausgedrückt hat, gelangt man leicht auch zu denjenigen Gleichungen, mit deren Hilfe sich die ursprünglichen gestörten Elemente als Funktion der neuen Elemente und von ε darstellen lassen. Nichts hindert, in dem neuen Systeme Differentialgleichungen den Beständigen e und c diejenigen Zahlenwerthe zuzutheilen, von welchen man auch in dem ursprünglichen, dem Falle $\varepsilon = 0$ entsprechenden Systeme Gebrauch machen würde. Es bestehen dann nebeneinander die beiden Gleichungen:

$$\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}} = 1 + e \cos v, \qquad \frac{p}{r} = 1 + e \cos v.$$

Daraus folgt $\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}} = \frac{p}{r}$. Da nun aber zur Bestimmung von $r_{\prime}$ die Gleichung:

$$r_{\prime}^2 = r^2 \,(1 + 2\,\varepsilon\,\eta + \eta^2)$$

aufgestellt worden ist, so erhält man dieser entsprechend:

26. $$p_{\prime}^2 = p^2 (1 + 2\,\varepsilon\,\eta + \eta^2).$$

Hiermit ist der ursprüngliche Parameter als Funktion des neuen und von ε dargestellt. Zur Bestimmung von $p_{\prime}$ liegt nach § 13 die folgende Gleichung vor:

$$p_{\prime}^2 = p_0^2 - \frac{2\,a}{1 - e^2} + 2\,\frac{p}{r}\,(\tau_{\prime} \cos v + \sigma_{\prime} \sin v).$$

Nachdem man die erste Näherung von $p_{\prime}$ daraus hergeleitet hat, erhält man aus 26. die erste Näherung von p.

Die Gleichung, aus welcher sich das Element $\omega_{\prime}$ als Funktion von ω und ε bestimmt, ist aus den Gleichungen 21. des vorigen Paragraphen herzuleiten. Zu diesem Behufe schreibe ich dieselben in der folgenden Form:

$$r_{\prime}\Big(\cos(\vartheta_{\prime} - \vartheta)\cos u_{\prime} - \cos i_{\prime} \sin(\vartheta_{\prime} - \vartheta)\sin u_{\prime}\Big) = \qquad r \cos u + r_{\prime}\,\varepsilon \cos u_{\prime}$$

$$r_{\prime}\Big(\sin(\vartheta_{\prime} - \vartheta)\cos u_{\prime} + \cos i_{\prime} \cos(\vartheta_{\prime} - \vartheta)\sin u_{\prime}\Big) = r \cos i \sin u + r_{\prime}\,\varepsilon \sin u_{\prime}$$

$$r_{\prime} \sin i_{\prime} \sin u_{\prime} = r \sin i \sin u.$$

Die zweite Gleichnng multiplicire man mit $\cos i$, die dritte mit $\sin i \cos(\vartheta_{\prime} - \vartheta)$, nnd addire alsdann die beiden Gleichungen. Indem man dabei wieder von jener Vereinfachung:

$$\cos i_{\prime} \cos i + \sin i_{\prime} \sin i \cos(\vartheta_{\prime} - \vartheta) = 1$$

Gebranch macht, erhält man die neue Gleichnng:

$$r_{\prime}\Big(\cos i \sin(\vartheta_{\prime} - \vartheta)\cos u_{\prime} + \cos(\vartheta_{\prime} - \vartheta)\sin u_{\prime}\Big) = r \sin u + r_{\prime}\,\varepsilon \cos i \sin u_{\prime}.$$

Ich schreibe dieselbe, und ebenso die erste der obigen Gleichungen 21., auf Grund einer schon im vorigen Paragraphen ausgeführten Umwandlung, etwas einfacher:

$$r_s \cos\left(u_s + \vartheta_s - \vartheta - \sin^2\frac{i_s}{2}\sin 2(\vartheta_s - \vartheta)\right) = r\cos u + r,\varepsilon \cos u,$$

$$r_s \sin\left(u_s + \vartheta_s - \vartheta - \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta_s - \vartheta)\right) = r\sin u + r,\varepsilon \cos i \sin u,.$$

In der ersteren darf man i an die Stelle von i_s setzen. Denn es ist $\sin^2\frac{i_s}{2} - \sin^2\frac{i}{2} = \sin\frac{i_s + i}{2}\sin\frac{i_s - i}{2}$, welcher Ausdruck in der Multiplication mit $\sin 2(\vartheta_s - \vartheta)$ neben der Einheit gestrichen werden kann. Indem man die Veränderliche r aus den beiden Gleichungen eliminirt, erhält man die neue:

$$\sin\left(u_s + \vartheta_s - u - \vartheta - \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta_s - \vartheta)\right) = \frac{r,\varepsilon}{r_s}\frac{ds}{du}.$$

Es bedarf nur noch, dass man $u_s + \vartheta_s = v + \omega_s$ nnd $u + \vartheta = v + \omega$ setze, um das Element ω_s als Funktion von ω und ε bestimmen zu können. Man hat die Gleichung:

27. $$\sin\left(\omega_s - \omega - \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta_s - \vartheta)\right) = \frac{r,\varepsilon}{r_s}\frac{ds}{du}.$$

Die derselben zu Grunde liegenden Vernachlässigungen können um so weniger beanstandet werden, als in Folge der von der Gleichung 27. zu machenden Verwendung nicht die Störungsglieder der ersten Ordnung selbst, sondern nur das in denselben vorkommende Element ω betroffen ist.

Im Ganzen sind es die vier gestörten Elemente $p, \omega, i, \vartheta_s$, welche als Funktion der gleichnamigen Elemente $p\ \omega\ i\ \vartheta$ und von ε dargestellt werden sollen. Man hat sich in dieser Absicht der drei Gleichungen 21. bedient, welche im § 46 zur Transformation der Polarcoordinaten aufgestellt worden sind. Da sich aus drei Gleichungen aber nur drei Unbekannte berechnen lassen, so ist man genöthigt, wegen der vierten Unbekannten zu den Differentialgleichungen der Bewegung Zuflucht zu nehmen. Man bedarf dazu aber keiner weiteren Integration. Die vier endlichen Integrale sind ebensowohl für das neue System Differentialgleichungen, welches einem veränderlichen ε entspricht, als für das ursprüngliche System aufgestellt worden. Durch die Vergleichung der beiderseitigen Flächenintegrale ergeben sich leicht noch weitere endliche Gleichungen, welche zwischen den gestörten Elementen des einen und des andern Systems bestehen. Die Zahl der im Ganzen zur Verfügung stehenden endlichen Gleichungen erweist sich als hinreichend gross, um alle gestörten Elemente des für den Fall $\varepsilon = 0$ aufgestellten Systems als Funktion der neuen Elemente und von ε ausdrücken zu können.

Ich gehe von den bekannten Gleichungen aus:

$$\eta\zeta' - \zeta\eta' = n_s \sin i_s \sin\vartheta_s$$

$$\xi\zeta' - \zeta\xi' = n_s \sin i_s \cos\vartheta_s$$

$$\xi\eta' - \eta\xi' = n_s \cos i_s,$$

und setze auf der linken Seite die durch die Gleichungen 18. gegebenen Coordinatenwerthe $\xi\ \eta\ \zeta$ ein, von der Voraussetzung ausgehend, dass ε eine unbestimmte Funktion der Zeit sei. Die obigen Gleichungen gehen über in:

$$(y z' - z y') \cos^2 \varepsilon + (y_{,} z' - z_{,} y' + y z_{,}' - z y_{,}') \cos \varepsilon \sin \varepsilon + (y_{,} z_{,}' - z_{,} y_{,}') \sin^2 \varepsilon + (y z_{,} - z y_{,}) \varepsilon' = n_s \sin i_s \sin \vartheta_s$$

$$(x z' - z x') \cos^2 \varepsilon + (x_{,} z' - z_{,} x' + x z_{,}' - z x_{,}') \cos \varepsilon \sin \varepsilon + (x_{,} z_{,}' - z_{,} x_{,}') \sin^2 \varepsilon + (x z_{,} - z x_{,}) \varepsilon' = n_s \sin i_s \cos \vartheta_s$$

$$(x y' - y x') \cos^2 \varepsilon + (x_{,} y' - y_{,} x' + x y_{,}' - y x_{,}') \cos \varepsilon \sin \varepsilon + (x_{,} y_{,}' - y_{,} x_{,}') \sin^2 \varepsilon + (x y_{,} - y x_{,}) \varepsilon' = n_s \cos i_s \,.$$

Indem man nun die Gleichungen 9. des § 43:

$$y z' - z y' + (y z_{,} - z y_{,}) \varepsilon' = n \sin i \sin \vartheta$$

$$x z' - z x' + (x z_{,} - z x_{,}) \varepsilon' = n \sin i \cos \vartheta$$

$$x y' - y x' + (x y_{,} - y x_{,}) \varepsilon' = n \cos i \,,$$

und gleichzeitig die entsprechenden für den andern Massenpunkt bestehenden Gleichungen zu Hilfe nimmt, führt man die obigen Gleichungen über in:

28.
$$\begin{aligned} n \sin i \sin \vartheta \cos^2 \varepsilon + (y_{,} z' - z_{,} y' + y z_{,}' - z y_{,}') \cos \varepsilon \sin \varepsilon + n_{,} \sin i_{,} \sin \vartheta \sin^2 \varepsilon &= n_s \sin i_s \sin \vartheta_s \\ n \sin i \cos \vartheta \cos^2 \varepsilon + (x_{,} z' - z_{,} x' + x z_{,}' - z x_{,}') \cos \varepsilon \sin \varepsilon + n_{,} \sin i_{,} \cos \vartheta \sin^2 \varepsilon &= n_s \sin i_s \cos \vartheta_s \\ n \cos i \cos^2 \varepsilon + (x_{,} y' - y_{,} x' + x y_{,}' - y x_{,}') \cos \varepsilon \sin \varepsilon + n_{,} \cos i_{,} \sin^2 \varepsilon &= n_s \cos i_s \,. \end{aligned}$$

Die Flächenintegrale des ursprünglichen Systems haben die Form:

$$n_s \sin i_s \sin \vartheta_s + n_{,s} \sin i_{,s} \sin \vartheta_s = 0$$

$$n_s \sin i_s \cos \vartheta_s + n_{,s} \sin i_{,s} \cos \vartheta_s = 0$$

$$n_s \cos i_s + n_{,s} \cos i_{,s} - c = 0$$

Es ist gezeigt worden, dass sich dieselben in der gleichen Form auch durch die neuen Elemente ausdrücken. Man hat nämlich:

$$n \sin i \sin \vartheta + n_{,} \sin i_{,} \sin \vartheta = 0$$

$$n \sin i \cos \vartheta + n_{,} \sin i_{,} \cos \vartheta = 0$$

$$n \cos i + n_{,} \cos i_{,} - c = 0 .$$

Dass auch die beigefügten Integrationsbeständigen in dem einen und in dem andern Falle identisch sind, lässt sich leicht nachweisen. Es bedarf dazu Nichts weiter, als dass man die den Gleichungen 28. entsprechenden auch für die andere Bahn anschreibe, indem man in den ersteren die gleichnamigen unten gestrichenen und nicht gestrichenen Buchstaben gegen einander, und zugleich ε gegen $-\varepsilon$ vertauscht. Addirt man die Gleichungen der einen Bahn einzeln genommen zu den entsprechenden der andern Bahn, so erweist sich auf der Stelle die Richtigkeit des Gesagten.

Mit Rücksicht auf die Flächenintegrale schreiben sich die Gleichungen 28. etwas einfacher. Da es nebenbei gestattet ist, $\sin \varepsilon = \varepsilon$ und $\cos \varepsilon = 1$, ferner $n \varepsilon^2 = 0$ zu setzen, so gehen dieselben über in:

29.
$$\begin{aligned} n \sin i \sin \vartheta + (y_{,} z' - z_{,} y' + y z_{,}' - z y_{,}') \varepsilon &= n_s \sin i_s \sin \vartheta_s \\ n \sin i \cos \vartheta + (x_{,} z' - z_{,} x' + x z_{,}' - z x_{,}') \varepsilon &= n_s \sin i_s \cos \vartheta_s \\ n \cos i + c \varepsilon^2 + (x_{,} y' - y_{,} x' + x y_{,}' - y x_{,}') \varepsilon &= n_s \cos i_s \,. \end{aligned}$$

Dies sind aber die oben erwähnten endlichen Gleichungen, durch welche sich die Elemente $\vartheta_0\, i_0\, n_0$ als Funktion der gleichnamigen $\vartheta\; i\; n$ und von ε darstellen lassen.

Um die Elemente $\vartheta_0\, i_0\, n_0$ daraus zu bestimmen, gibt man diesen Gleichungen eine andere Gestalt, welche dem beabsichtigten Zwecke dienlicher ist, indem man auf der linken Seite in dem ersten Gliede jedesmal die Grösse n eliminirt. Auf diesem Wege wird zugleich in den mit ε multiplirten Gliedern die Elimination der rechtwinkeligen Coordinaten durch Polarcoordinaten vorbereitet. Das Letztere betreffend bedient man sich der im § 44 aufgestellten identischen Gleichungen:

$$\frac{y_, z' - z_, y'}{r\, r_,} = \left(\frac{y_, z - z_, y}{r\, r_,}\right)_n \frac{n}{r^2} = \frac{y_, z - z_, y}{r\, r_,}\,\frac{\varrho}{r}$$

$$\frac{y\, z_,' - z\, y_,'}{r\, r_,} = \left(\frac{y\, z_, - z\, y_,}{r\, r_,}\right)_{n_,} \frac{n_,}{r_,^2} = \frac{y\, z_, - z\, y_,}{r\, r_,}\,\frac{\varrho_,}{r_,},$$

und der entsprechenden, welche durch die Vertauschung der nicht gleichnamigen Coordinaten gegen einander entstehen. Ferner bedient man sich der gleichfalls im § 44 aufgestellten identischen Gleichungen:

$$\frac{x\, z_, - z\, x_,}{r\, r_,} \sin\vartheta - \frac{y\, z_, - z\, y_,}{r\, r_,} \cos\vartheta \qquad = \sin(i - i_,) \sin u \sin u_,$$

$$\frac{x\, y_, - y\, x_,}{r\, r_,} \sin i - \left(\frac{x\, z_, - z\, x_,}{r\, r_,} \cos\vartheta + \frac{y\, z_, - z\, y_,}{r\, r_,} \sin\vartheta\right) \cos i = \sin(i - i_,) \cos u \sin u_,,$$

und es ist nun leicht, die Polarcoordinaten an die Stelle der rechtwinkeligen zu setzen. Es kommt dann aber auch die oben verlangte Elimination der Grösse n zum Vollzug. Die Gleichungen 29. führen auf diesem Wege zu den beiden folgenden:

$$\sin(i - i_,)\left(\cos u \sin u_, \frac{n\, r_,}{r} - \sin u \cos u_, \frac{n_,\, r}{r_,} + \sin u \sin u_, (r_, \varrho - r\, \varrho_,)\right)\varepsilon = n_0 \sin i_0 \sin(\vartheta_0 - \vartheta)$$

$$\sin(i - i_,)\left(\sin u \sin u_, \frac{n\, r_,}{r} + \cos u \cos u_, \frac{n_,\, r}{r_,} - \cos u \sin u_, (r_, \varrho - r\, \varrho_,)\right)\varepsilon + c \sin i\, \varepsilon^2$$

$$= n_0 \left(\sin i \cos i_0 - \cos i \sin i_0 \cos(\vartheta_0 - \vartheta)\right).$$

In der Theorie des Mondes ist es gestattet, $i_, = 0$ zu setzen. In Folge dessen gehen die vorliegenden Gleichungen über in:

30. $$\sin i \left(\cos u \sin u_, \frac{n\, r_,}{r} - \sin u \cos u_, \frac{n_,\, r}{r_,} + \sin u \sin u_, (r_, \varrho - r\, \varrho_,)\right)\varepsilon = n_0 \sin i_0 \sin(\vartheta_0 - \vartheta)$$

31. $$\sin i \left(\sin u \sin u_, \frac{n\, r_,}{r} + \cos u \cos u_, \frac{n_,\, r}{r_,} - \cos u \sin u_, (r_, \varrho - r\, \varrho_,) + c\, \varepsilon\right)\varepsilon$$

$$= n_0 \left(\sin i \cos i_0 - \cos i \sin i_0 \cos(\vartheta_0 - \vartheta)\right).$$

Dies sind zwei Gleichungen, mit deren Hilfe man die ursprünglichen Elemente ϑ_0 und i_0 als Funktion der neuen und von ε darstellen kann.

Man kann leicht auch das Element n_0 als Funktion der neuen Elemente darstellen. Zu diesem Behufe bringe man mit den Gleichungen 29. die identische Gleichung:

$$\frac{x y_{,} - y x_{,}}{r r_{,}} \cos i + \left(\frac{x z_{,} - z x_{,}}{r r_{,}} \cos \vartheta + \frac{y z_{,} - z y_{,}}{r r_{,}} \sin \vartheta \right) \sin i = \frac{ds}{du}$$

in Verbindung. Man findet zur Bestimmung von n_s die Gleichung:

$$n + \left(s \frac{n r_{,}}{r} + \frac{d^2 s}{du du_{,}} \frac{n_{,} r}{r_{,}} - \frac{ds}{du} (r_{,} \varrho - r \varrho_{,}) \right) \varepsilon + c \cos i \, \varepsilon^2 = n_s \left(\cos i \cos i_s + \sin i \sin i_s \cos (\vartheta_s - \vartheta) \right).$$

Es ist schon oben gezeigt worden, dass diejenige Grösse, welche hier den Coefficienten von n_s darstellt, der Einheit gleichgesetzt werden darf. Man behält also die vorstehende Gleichung in der einfacheren Form:

32. $$n + \left(s \frac{n r_{,}}{r} + \frac{d^2 s}{du du_{,}} \frac{n_{,} r}{r_{,}} - \frac{ds}{du} (r_{,} \varrho - r \varrho_{,}) \right) \varepsilon + c \cos i \, \varepsilon^2 = n_s .$$

In den im Vorstehenden aufgestellten Gleichungen kommt die Veränderliche $\varrho = r' + r_{,} s \varepsilon'$ vor. Zählt man zu den Elementen $p \, \omega \, n \, i \, \vartheta$ als sechstes die Veränderliche p' hinzu, so hat dasselbe in der Veränderlichen ϱ einen Stellvertreter. Der letzteren entspricht unter den ursprünglichen Veränderlichen die Derivirte r_s', welche gleichfalls als Funktion der neuen Veränderlichen leicht dargestellt werden kann. Man geht desshalb von der Gleichung 20. des § 46 aus:

$$r_s^2 = r^2 + 2 r r_{,} s \varepsilon + r_{,}^2 \varepsilon^2 .$$

Differentiirt man dieselbe, so entsteht:

$$r_s r_s' = r (r' + r_{,} s \varepsilon') + (r r_{,} s)' \varepsilon + r_{,} r_{,}' \varepsilon^2 + r_{,}^2 s \varepsilon',$$

wo noch die Derivirte $(r r_{,} s)'$ eingesetzt werden muss. Da dieselbe in dem Bisherigen noch nicht aufgestellt worden ist, so schreibe man zunächst die Gleichung an:

$$(r r_{,} s)' = x_{,} x' + y_{,} y' + z_{,} z' + x x_{,}' + y y_{,}' + z z_{,}' .$$

Die eine Hälfte der Glieder betreffend findet man:

$$\frac{x_{,} x' + y_{,} y' + z_{,} z'}{r r_{,}} = \frac{x_{,}}{r_{,}} \left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{y_{,}}{r_{,}} \left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{z_{,}}{r_{,}} \left(\frac{z}{r}\right)' + s \frac{r'}{r},$$

was mit Rücksicht auf die Gleichungen 10. des § 43 übergeht in:

$$\frac{x_{,} x' + y_{,} y' + z_{,} z'}{r r_{,}} = \frac{ds}{du} \frac{n}{r^2} + s \frac{\varrho}{r} - \frac{r_{,}}{r} \varepsilon' .$$

Ebenso findet man die Gleichung:

$$\frac{x x_{,}' + y y_{,}' + z z_{,}'}{r r_{,}} = \frac{ds}{du_{,}} \frac{n_{,}}{r_{,}^2} + s \frac{\varrho_{,}}{r_{,}} + \frac{r}{r_{,}} \varepsilon' .$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Derivirte:

$$(r r_{,} s)' = \frac{ds}{du} \frac{n r_{,}}{r} + \frac{ds}{du_{,}} \frac{n_{,} r}{r_{,}} + s (r_{,} \varrho + r \varrho_{,}) - (r_{,}^2 - r^2) \varepsilon' .$$

Indem man dieselbe oben einsetzt, erhält man zur Bestimmung von r_s' die Gleichung:

33. $$r\varrho + \left(\frac{ds}{du}\frac{n\,r_{,}}{r} + \frac{ds}{du_{,}}\frac{n_{,}\,r}{r_{,}} + s(r_{,}\varrho + r\varrho_{,})\right)\varepsilon + r_{,}\,r_{,}'\,\varepsilon^2 = r_{0}\,r_{1}'\,.$$

Wirft man nun einen Rückblick auf die sechs Gleichungen, durch welche die sechs Elemente $p_{,}$ $\omega_{,}$ $i_{,}$ $\vartheta_{,}$ $n_{,}$ $r_{,}'$ als Funktion der entsprechenden neuen Elemente und von ε dargestellt werden, so ist vor Allem bemerkenswerth, dass die noch übrigen fünf Gleichungen, über welche man nach erfolgter Elimination von ϱ zu verfügen hat, unabhängig sind von der Derivirten ε'. Man ersieht daraus, dass diese Gleichungen, auch in Bezug auf die Veränderliche ε eine endliche Form haben. Dies wäre nicht so, wenn man bei deren Aufstellung von den Flächenintegralen des § 41 ausgehen wollte. Die erwähnte Eigenschaft haben die vorliegenden Gleichungen dem Umstande zu verdanken, dass die kanonische Form der Flächenintegrale wieder hergestellt worden ist.

Es ist unverkennbar, dass die in Rede stehenden Gleichungen die Vermittlung geben zwischen dem ursprünglichen Systeme Störungsgleichungen und dem neuen einem veränderlichen ε entsprechenden des § 44. Auf diesen Umstand ist ausführlicher in den Ausführungen des § 45 hingewiesen worden. Will man sich bei der Aufstellung der endlichen Gleichungen, welche zwischen den ursprünglichen und den neuen Elementen bestehen, auf die Glieder der ersten Ordnung beschränken, und fasst man dabei ins Besondere die Differentialgleichungen 12. 14. 15. 16. des § 44 ins Auge, in welchen neben den Derivirten $\omega_{,}'$ $\vartheta_{,}'$ $i_{,}'$ $n_{,}'$ nur die erste Derivirte von ε vorkommt, so lassen sich dieselben auf der Stelle niederschreiben. Es bedarf hierzu nur der theilweisen Integration nach ε in den mit ε' multiplicirten Gliedern der genannten Differentialgleichungen.

§ 48. Reduction des Parameters und des Perigäums der Mondbahn vermittelst der veränderlichen Focodistanz.

Da jene Gleichungen, durch welche die ursprünglichen Elemente als Funktion der neuen Elemente und von ε dargestellt sind, auch in Bezug auf die Grösse ε die endliche Form haben, so ist die Lösung der Aufgabe, irgend einem der neuen Elemente durch die passende Wahl von ε eine beliebige Eigenschaft beizulegen, sehr vereinfacht. Man findet das hierzu geeignete ε ohne Weiteres durch die Auflösung einer algebraischen Gleichung. Die einzige Beschränkung, welcher die Wahl der dem neuen Elemente zuzutheilenden Eigenschaft unterworfen ist, liegt in der Forderung, dass der aus der algebraischen Gleichung berechnete Werth ε nicht einen Nenner enthalte, welcher zeitweise verschwindet.

Wenn der ursprüngliche Parameter $p_{,}$ in den neuen Parameter p übergeht, so erleidet derselbe eine Variation, welche aus der Gleichung 26.:

$$p_{,}^2 = p^2(1 + 2s\eta + \eta^2)$$

bestimmt werden kann. Indem man nur diejenigen Glieder der Variation beibehält, welche kleine Grössen der ersten Ordnung sind, schreibt man die einfachere Gleichung:

$$\left(\frac{p_{,}}{p_{0}}\right)^2 - 2s\eta = \left(\frac{p}{p_{0}}\right)^2 .$$

Daraus ist ersichtlich, dass durch die passende Wahl von η alle diejenigen Glieder des Parameters weggebracht werden können, welche den Factor $s = \cos w$ haben.

Die weniger hervorragenden Glieder der ersten Ordnung vernachlässigend hat man im § 38 die erste Näherung von p_s^2 in der folgenden Form angeschrieben:

$$\frac{p_s^2}{p_0^2} - 1 = -2\left(b + c\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos 2w + k\frac{p_s}{r_s}\frac{p}{r}\cos(2w - v)\right) .$$

Es muss aber daran erinnert werden, dass in Folge der dort getroffenen Wahl der Integrationsbeständigen τ_0 das Glied $-2\,\tau_0 \cos v$ in der ersten Näherung unberücksichtigt bleiben durfte. Unterwirft man die beiden veränderlichen in die obige Näherung aufgenommenen Glieder einer kleinen Umwandlung, schreibt man nämlich:

$$\cos 2w = 2\cos^2 w - 1$$

$$\cos(2w - v) = 2\cos w \cos(w - v) - \cos v ,$$

so zerfällt jedes derselben in zwei Bestandtheile, von denen der eine den Factor $\cos w$ hat, der andere aber das Einemal dem beständigen Gliede der obigen Näherung, das Anderemal dem ausser Acht gelassenen mit τ_0 multiplicirten Gliede als gleichartig angesehen werden darf. Die mit $\cos w$ multiplicirten Bestandtheile lassen sich, wie man soeben gesehen hat, durch die passende Wahl von η beseitigen. Die erste Näherung von p^2 zeigt sich dann in einer wesentlich einfacheren Form als das obige p_s^2. Um aber die mit $\cos w$ multiplicirten Glieder wegzuschaffen, hat man sich des folgenden Werthes zu bedienen:

34. $$\eta = -2\left(c\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos w + k\frac{p_s}{r_s}\frac{p}{r}\cos(w - v)\right) .$$

Das in die erste Näherung von p^2 nun wieder aufgenommene Glied $\cos v$ kann durch eine andere Wahl jener willkürlichen Beständigen τ_0 daraus entfernt werden. Man gelangt zu diesem Ziele, indem man den bisherigen Werth τ_0 um die Grösse k grösser macht.

Um auch den Einfluss kennen zu lernen, welchen die veränderliche Focodistanz auf die Variation des Perigäums äussert, hat man sich der Gleichung 27.:

$$\sin\left(\omega_s - \omega - \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta_s - \vartheta)\right) = \frac{ds}{du}\frac{r_s s}{r_s}$$

zu bedienen. Indem man wieder nur die Glieder der ersten Ordnung berücksichtigt, schreibt man die einfachere Gleichung:

$$\omega_s - \frac{ds}{du}\eta = \omega .$$

Man ersieht aus derselben, dass durch ein passend gewähltes η alle diejenigen Glieder des Perigäums weggebracht werden können, welche den Factor $\sin w$ haben.

Schreibt man die erste Näherung des Perigäums in der folgenden Form:

$$\omega_s - \omega_0 = g\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^2\left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin 2w + h\frac{p_s}{r_s}\frac{p}{r}\sin(2w - v) ,$$

so sind die beiden grössten Störungen, welche dies Element erleidet, die Variation und die Evection des Mondes, darin enthalten. Vermittelst der Grösse η können dieselben beide weggebracht werden. In dieser Absicht schreibt man:

$$\sin 2w = 2 \sin w \cos w$$

$$\sin (2w - v) = 2 \sin w \cos (w - v) - \sin v \ .$$

In Folge dieser Umwandlung treten an die Stelle der genannten Störungen im Ganzen drei Glieder, von denen zwei den Factor $\sin w$ haben. Durch die Beseitigung der mit $\sin w$ multiplicirten Glieder findet man den Werth:

35. $$\eta = -2\left(g \left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^2 \left(\frac{r}{r_{\prime}}\right)^2 \cos w + h \frac{p_{\prime}}{r_{\prime}} \frac{p}{r} \cos (w - v) \right),$$

welcher sich von dem obigen unter 34. gegebenen Werthe nur in den beständigen Coefficienten unterscheidet. Jenes dritte Glied, welches durch die vorstehende Umwandlung der Glieder erzielt wird, ist gleichartig mit dem in der ersten Näherung von $\omega_{\prime}$ gestrichenen Gliede $+ 2 \tau_0 \sin v$. Durch eine andere Wahl der willkürlichen Beständigen τ_0 kann dasselbe wieder beseitigt werden. Da man den Coefficienten der Evection kennt, so findet man leicht, dass zu diesem Zwecke der bisherige Werth τ_0 um beiläufig $\frac{2}{5}\, e$ grösser gemacht werden müsste.

Es ist im § 37 gezeigt worden, dass eine Zunahme der Integrationsbeständigen τ_0 eine gleich grosse Abnahme in dem Werthe der Excentricität zur Folge hat. Die Beseitigung des mit $\sin v$ multiplicirten Gliedes im Perigäum bewirkt, auf Grund dieser Beziehung zwischen den Beständigen τ_0 und e, dass die Excentricität der Mondbahn einen kleineren Werth erhält. War derselbe vorher beiläufig $\frac{1}{18}$, so ist jetzt $e + \frac{2}{5}\, e = \frac{1}{18}$ zu setzen, was beiläufig $e = \frac{1}{25}$ gibt.

Durch die Einführung des veränderlichen ε wird eigentlich nicht die Evection beseitigt, sondern nur derjenige Bestandtheil der Evection, welcher wegen des Factors $\sin w$ zur Zeit der Conjunction und der Opposition verschwindet. Der andere Bestandtheil, dessen Form mit der Gleichung des Mittelpunkts übereinstimmt, bewirkt durch sein Hinzutreten zu der letzteren, dass die Excentricität jenen kleineren Werth erhält. Zu eben diesem Werthe der Excentricität sind durch ihre Beobachtungen schon die alten Griechen gelangt. Die Mondbeobachtungen auf die Zeit der Finsternisse beschränkend haben dieselben von dem mit $\sin w$ multiplicirten Bestandtheile keine Kenntniss erhalten, und waren desshalb ausser Stande, den Einfluss der Evection von dem der Mittelpunktsgleichung zu trennen. Die Evection als eine von der Mittelpunktsgleichung unabhängige Störung der Mondbahn ist bekanntlich erst später, von *Ptolemaeus* entdeckt worden.

Die von der Sonne um die Erde beschriebene Bahn darf als eine ungestörte Ellipse angesehen werden, deren Brennpunkt mit dem gemeinsamen Schwerpunkte der Erde und des Mondes zusammenfällt. Wegen dieser Lage des Brennpunktes bezeichnet der Leitstrahl der von der Sonne beschriebenen Ellipse nahezu die Richtung der Resultante der beiden Anziehungen, welche von der Erde und von dem Monde ausgehend auf die Sonnenmasse einwirken. Dieses Zusammentreffen liegt der im § 9, Pbl. III ausgesprochenen Ansicht zu Grunde, dass die elliptische Bewegung im Allgemeinen einen engeren Anschluss an die wirkliche Bewegung ermögliche, oder dass die gestörten Elemente kleineren Variationen unterworfen seien, wenn der Brennpunkt der Ellipse von dem Orte des Centralkörpers weg gegen den störenden Körper hingerückt sei. Dass aber diese Auffassung einer Berichtigung bedarf, lässt sich auf Grund vorstehenden Untersuchungen über die Verwendung von ε leicht nachweisen.

Die obigen Werthe η, vermittelst deren man die beiden am meisten hervorragenden Glieder des Parameters oder des Perigäums beseitigen kann, unterscheiden sich nur in den beständigen Coefficienten. Man kann diese Coefficienten so wählen, dass die erwähnten Glieder in den beiden Elementen gleichzeitig

eine Reduction erfahren. Um zu dem oben Gesagten den Nachweis zu liefern, darf ich mich auf das eine Glied des obigen Werthes η beschränken. Ich setze nämlich $\eta = -2g\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2 \cos w$, durch welche Annahme vorhin die Variation des Mondes beseitigt worden ist. Dieser Werth η hat auch in dem entsprechenden Gliede des Parameters eine Reduktion zur Folge, insofern als dessen Coefficient dadurch einen kleineren Werth erhält. Auf jene geometrische Betrachtung eingehend, der zufolge die Entfernung des Brennpunktes der Mondbahn vom Mittelpunkte der Erde durch die Grösse ε bestimmt ist, kann man aus der Beschaffenheit des vorliegenden Werthes η ersehen, dass der Brennpunkt der Ellipse zur Zeit der Quadraturen mit dem Mittelpunkte der Erde zusammenfällt; zur Zeit der Conjunction und der Opposition aber beiläufig seinen grössten Abstand hat. Ferner folgt aus der Anwesenheit des negativen Zeichens in dem Coefficienten von η, dass der Brennpunkt, wenn sein Abstand nicht gerade verschwindet, jederzeit auf der von der Sonne abgewendeten Seite der Erde liegt. Dies steht in der That mit der oben erwähnten Ansicht über den Ort des Brennpunktes im Widerspruche.

§ 49. Der gestörte Körper bezogen auf einen in der Ebene der drei Körper frei beweglichen Punkt.

Die beiden sich störenden Körper seien wieder auf den Ort des Centralkörpers bezogen. Fasst man die Stellung der drei Körper zu einander in einem beliebigen Augenblicke auf, so lässt sich in deren Ebene jedesmal eine Curve verzeichnen, auf welcher der Nullpunkt des Coordinatensystems liegen muss, damit die Differentialgleichungen der Bewegung die kanonische Form haben. Die Coordinaten dieses Nullpunktes, bezogen auf den Ort des Centralkörpers, sind im § 2 aufgestellt worden, und zeigen sich als Funktion von ε. Wenn der Nullpunkt der Coordinaten aus dieser Curve heraus nach einem andern der Ebene der drei Körper angehörigen Punkte verlegt wird, so geht die kanonische Form des Systems verloren. Wenn aber die Bewegung in der That auf einen derartigen Punkt bezogen sein soll, so gelangt man auf diesem Wege zu einer vortheilhaften Darstellung der neuen Bewegungsgleichungen, welche, wenn auch weniger einfach als die kanonischen, für die Lösung des Problems doch zu merkwürdigen Ergebnissen führen.

Geht man von dem kanonischen Systeme aus:

$$\xi'' = \frac{dU}{d\xi} \qquad \xi_{\prime}'' = \frac{dU}{d\xi_{\prime}}$$

$$\eta'' = \frac{dU}{d\eta} \qquad \eta_{\prime}'' = \frac{dU}{d\eta_{\prime}}$$

$$\zeta'' = \frac{dU}{d\zeta} \qquad \zeta_{\prime}'' = \frac{dU}{d\zeta_{\prime}},$$

so hat man, um einen beliebigen der Ebene der drei Körper angehörigen Punkt zum Nullpunkt der neuen Coordinaten zu machen, die lineare Transformation auszuführen:

36. $$\xi = x \cos \varepsilon_, + x_, \sin \varepsilon \qquad \xi_, = x_, \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon_,$$

$$\eta = y \cos \varepsilon_, + y_, \sin \varepsilon \qquad \eta_, = y_, \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon_,$$

$$\zeta = z \cos \varepsilon_, + z_, \sin \varepsilon \qquad \zeta_, = z_, \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon_,$$

worin ε und $\varepsilon_,$ willkürliche Beständige sind. Wenn die eine der beiden willkürlichen Beständigen wegfällt, da man $\varepsilon + \varepsilon_, = 0$ setzt, so hat man wieder jene allgemeine lineare Transformation des § 2, an welche die kanonische Form des Systems geknüpft ist. Setzt man aber abkürzend $\varepsilon + \varepsilon_, = \sigma$, so findet man das transformirte System in der folgenden Form:

37. $$x'' \cos^2 \sigma = \frac{dU}{dx} - \sin \sigma \frac{dU}{dx_,} \qquad x_,'' \cos^2 \sigma = \frac{dU}{dx_,} - \sin \sigma \frac{dU}{dx}$$

$$y'' \cos^2 \sigma = \frac{dU}{dy} - \sin \sigma \frac{dU}{dy_,} \qquad y_,'' \cos^2 \sigma = \frac{dU}{dy_,} - \sin \sigma \frac{dU}{dy}$$

$$z'' \cos^2 \sigma = \frac{dU}{dz} - \sin \sigma \frac{dU}{dz_,} \qquad z_,'' \cos^2 \sigma = \frac{dU}{dz_,} - \sin \sigma \frac{dU}{dz}.$$

Es ist nun nicht meine Absicht, an die Stelle der rechtwinkeligen Coordinaten wieder Polarcoordinaten zu setzen. Ich möchte nur die Frage beantworten, welche Anordnung in Betreff der drei Polarcoordinaten $\vartheta\ i\ n$ getroffen werden müsste, damit die drei Flächenintegrale des transformirten Systems jene einfache Form haben, welche sich zuerst in dem kanonischen System gefunden hat. In dem ersten Abschnitte, wo die Differentialgleichungen der rechtwinkeligen Coordinaten die kanonische Form haben, musste man, um den drei Flächenintegralen jene einfache Form zu verschaffen, von der Voraussetzung ausgehen, dass die Ebene der Polarcoordinaten mit der Ebene der Bahn zusammenfalle. Wollte man in dem jetzt vorliegenden Systeme Differentialgleichungen an der gleichen Voraussetzung festhalten, so würden sich die Flächenintegrale in einer Form darstellen, welche zu einer weiteren Verfolgung der Aufgabe ganz unbrauchbar ist. Ich habe diese Form der Flächenintegrale an einem andern Orte veröffentlicht. (Astronomische Nachrichten Nr. 1758.)

Die hier beabsichtigte Untersuchung, die Polarcoordinaten $\vartheta\ i\ n$ betreffend, muss in sofern noch erweitert werden, als derselben die Annahme zu Grunde liegen soll, dass der Nullpunkt des Coordinatensystems nicht einen bestimmten in der Ebene der drei Körper verzeichneten Weg verfolge, sondern dass demselben eine freie Bewegung in dieser Ebene gestattet sei. Dies kann nur dadurch erreicht werden, dass man die beiden Grössen ε und $\varepsilon_,$ nicht mehr als willkürliche Beständige auffasst, sondern sich unbestimmte Funktionen der Zeit an deren Stelle gesetzt denkt.

Für das kanonische System Differentialgleichungen, welches oben zum Ausgangspunkte genommen ist, bestehen bekanntlich die Gleichungen:

$$\eta \zeta' - \zeta \eta' = n_0 \sin i_0 \sin \vartheta_0 \qquad \eta_, \zeta_,' - \zeta_, \eta_,' = n_{,0} \sin i_{,0} \sin \vartheta_{,0}$$

$$\xi \zeta' - \zeta \xi' = n_0 \sin i_0 \cos \vartheta_0 \qquad \xi_, \zeta_,' - \zeta_, \xi_,' = n_{,0} \sin i_{,0} \cos \vartheta_{,0}$$

$$\xi \eta' - \eta \xi' = n_0 \cos i_0 \qquad \xi_, \eta_,' - \eta_, \xi_,' = n_{,0} \cos i_{,0}.$$

Führt man hier die neuen unter 36. aufgezeichneten Coordinaten ein, so gehen die beiden Gleichungen der letzten Zeile über in die folgenden:

$$(x y' - y x')\cos^2 \varepsilon_, + (x_, y_,' - y_, x_,')\sin^2 \varepsilon + (x_, y' - y_, x' + x y_,' - y x_,')\cos \varepsilon_, \sin \varepsilon$$
$$+ (x y_, - y x_,)(\cos \varepsilon \cos \varepsilon_, \varepsilon' + \sin \varepsilon \sin \varepsilon_, \varepsilon_,') = n_{\theta} \cos i_{\theta}$$

$$(x_, y_,' - y_, x_,')\cos^2 \varepsilon + (x y' - y x')\sin^2 \varepsilon_, + (x y_,' - y x_,' + x_, y' - y_, x')\cos \varepsilon \sin \varepsilon_,$$
$$+ (x_, y - y_, x)(\cos \varepsilon \cos \varepsilon_, \varepsilon_,' + \sin \varepsilon \sin \varepsilon_, \varepsilon') = n_{,\theta} \cos i_{,\theta} .$$

Addirt man dieselben, so hat man die neue Gleichung:

$$x y' - y x' + x_, y_,' - y_, x_,' + (x_, y' - y_, x' + x y_,' - y x_,')\sin \sigma + (x y_, - y x_,)\cos \sigma (\varepsilon' - \varepsilon_,') = n_{\theta} \cos i_{\theta} + n_{,\theta} \cos i_{,\theta} .$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck gibt, einer willkürlichen Beständigen gleichgesetzt, ein Flächenintegral des ursprünglichen Systems. Da sich dies Flächenintegral als Funktion der neuen Elemente in derselben Form darstellen soll, so hat man ausserdem die Gleichung:

$$x y' - y x' + x_, y_,' - y_, x_,' + (x_, y' - y_, x' + x y_,' - y x_,')\sin \sigma + (x y_, - y x_,)\cos \sigma (\varepsilon' - \varepsilon_,') = n \cos i + n_, \cos i_, .$$

Es wird sich sogleich zeigen, dass man dieselbe, um die Polarcoordinaten festzustellen, in die beiden folgenden zerlegen darf:

$$x y' - y x' + (x y_,' - y x_,')\sin \sigma + (x y_, - y x_,)\cos \sigma \varepsilon' = n \cos i$$

$$x_, y_,' - y_, x_,' + (x_, y' - y_, x')\sin \sigma + (x_, y - y_, x)\cos \sigma \varepsilon_,' = n_, \cos i_, .$$

Von diesen beiden kann die eine aus der andern hergeleitet werden, indem man die unten gestrichenen Buchstaben und die gleichnamigen nicht gestrichenen gegen einander vertauscht. Durch deren Addition aber erhält man wieder die ursprüngliche Gleichung.

Indem man auch für die zwei andern Coordinatenverbindungen $x z$ und $y z$ die entsprechenden Gleichungen anschreibt, erhält man allerdings sechs Gleichungen. Aber man findet auch, dass damit im Ganzen doch nur vier wesentlich verschiedene Gleichungen gegeben sind, da jedesmal die dritte in zwei anderen enthalten ist. Mit Rücksicht auf die beiden identischen Gleichungen:

$$x \sin i \sin \vartheta - y \sin i \cos \vartheta + z \cos i = 0$$

$$x_, \sin i_, \sin \vartheta - y_, \sin i_, \cos \vartheta + z_, \cos i_, = 0$$

kann man diesen Zusammenhang zwischen je drei Gleichungen leicht nachweisen. Vier Gleichungen sind erforderlich, um die beiderseitigen Polarcoordinaten festzustellen. Die vorliegenden vier sind in der That darin ausgezeichnet, dass sie den Flächenintegralen die kanonische Form wiedergeben.

Es darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass sich in diesen vier Gleichungen neben den beiden willkürlichen Veränderlichen ε und $\varepsilon_,$ noch eine dritte willkürliche Veränderliche einführen lässt, wiewohl eine solche in der linearen Transformation nicht angebracht werden kann. Die beiden Gleichungen, durch welche die Polarcoordinaten der gestörten Masse in den neuen Bewegungsgleichungen festgestellt sind, können nämlich auch in dem folgenden Systeme ausgedrückt werden:

$$y z' - z y' + (y z_,' - z y_,')\sin \sigma + (y z_, - z y_,)(\cos \sigma \varepsilon' + \zeta) = n \sin i \sin \vartheta$$

38. $$x z' - z x' + (x z_,' - z x_,')\sin \sigma + (x z_, - z x_,)(\cos \sigma \varepsilon' + \zeta) = n \sin i \cos \vartheta$$

$$x y' - y x' + (x y_,' - y x_,')\sin \sigma + (x y_, - y x_,)(\cos \sigma \varepsilon' + \zeta) = n \cos i .$$

Bei der Ueberführung dieser Gleichungen in die entsprechenden der andern Bahn muss die neu eingeführte Veränderliche ζ ungeändert bleiben, damit dieselben auf denselben Ursprung hinweisen wie vorher. Die Aenderung, welche die Ebene der Polarcoordinaten in ihrer Lage erleiden kann, ist in der That von drei verschiedenen Grössen abhängig. Zwei davon fallen mit den Veränderlichen ε und $\varepsilon_{,}$ zusammen, durch welche der Ort des Brennpunktes in der Ebene der drei Körper festgelegt ist. Nebenbei ist noch eine Drehung der Ebene um den Leitstrahl möglich; und diese ist es, worauf jene dritte Veränderliche ζ Bezug hat.

Für den Fall, dass die Ebene der Polarcoordinaten mit der Ebene der Bahn zusammenfällt, hat man bekanntlich die einfachen Gleichungen:

$$\left(\frac{x}{r}\right)' = \left(\frac{x}{r}\right)_{u} \frac{n}{r^2} \qquad \left(\frac{y}{r}\right)' = \left(\frac{y}{r}\right)_{u} \frac{n}{r^2} \qquad \left(\frac{z}{r}\right)' = \left(\frac{z}{r}\right)_{u} \frac{n}{r^2}.$$

Unter den vorliegenden Voraussetzungen, wonach die Ebene der Polarcoordinaten frei beweglich sein soll, gestalten sich die Derivirten der drei Quotienten weniger einfach. Dieselben enthalten selbstverständlich weitere Glieder, welche von den willkürlichen Veränderlichen $\varepsilon\ \varepsilon_{,}$ und ζ abhängig sind. Um diese Derivirten herzuleiten, schreibe ich die letzte der Gleichungen 38. in der Form:

$$\frac{x}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' - \frac{y}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \left(\frac{x}{r}\left(\frac{y_{,}}{r_{,}}\right)' - \frac{y}{r}\left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)'\right)\frac{r_{,}}{r}\sin\sigma + \frac{x y_{,} - y x_{,}}{r r_{,}}\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right)$$
$$= \left(\frac{x}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_{u} - \frac{y}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_{u}\right)\frac{n}{r^2}.$$

Ordnet man hier alle Glieder nach den Factoren $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ so hat man auch:

$$\frac{x}{r}\left(\left(\frac{y}{r}\right)' + \left(\frac{y_{,}}{r_{,}}\right)'\frac{r_{,}}{r}\sin\sigma + \frac{y_{,}}{r_{,}}\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) - \left(\frac{y}{r}\right)_{u}\frac{n}{r^2}\right)$$
$$= \frac{y}{r}\left(\left(\frac{x}{r}\right)' + \left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)'\frac{r_{,}}{r}\sin\sigma + \frac{x_{,}}{r_{,}}\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) - \left(\frac{x}{r}\right)_{u}\frac{n}{r^2}\right).$$

Daraus folgt, dass man zur Bestimmung der Derivirten $\left(\frac{x}{r}\right)'$ die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{r}\right) + \left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)'\frac{r_{,}}{r}\sin\sigma + \frac{x_{,}}{r_{,}}\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) = \left(\frac{x}{r}\right)_{u}\frac{n}{r^2} + \frac{x}{r}\alpha$$

anschreiben darf, neben zwei weiteren ähnlich gebildeten, aus welchen sich die Derivirten der Quotienten $\frac{y}{r}$ und $\frac{z}{r}$ bestimmen. Die Grösse α ist eine noch unbestimmte Veränderliche, welche übrigens, wie leicht zu sehen ist, nach den Coordinaten $x\,y\,z$ eine symmetrische Gestalt hat.

Diese Gleichungen beziehen sich auf den Ort des Mondes. In gleicher Weise findet man, die Sonnenbahn betreffend, die Gleichung:

$$\left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)' + \left(\frac{x}{r}\right)'\frac{r}{r_{,}}\sin\sigma + \frac{x}{r}\left(\frac{r'}{r_{,}}\sin\sigma + \frac{r}{r_{,}}\cos\sigma\,\varepsilon_{,}' + \frac{r}{r_{,}}\zeta\right) = \left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)_{u}\frac{n_{,}}{r_{,}^2} + \frac{x_{,}}{r_{,}}\alpha_{,}.$$

Doch lässt sich dieselbe erheblich einfacher schreiben als die obigen. Denn die willkürlichen Veränder-

lichen müssen so gewählt sein, dass sich in jenen anderen der Mondbahn entsprechenden Gleichungen die Producte $\frac{r_{,}}{r}\varepsilon$, $\frac{r_{,}}{r}\sin\sigma$ und $\frac{r_{,}}{r}\zeta$ als kleine Grössen der ersten Ordnung darstellen. In Folge dessen darf hier $\frac{r}{r_{,}}\varepsilon = 0$, $\frac{r}{r_{,}}\sin\sigma = 0$ und $\frac{r}{r_{,}}\zeta = 0$ gesetzt werden. Es folgt dann auch $\alpha_{,} = 0$, und man behält, ebenso wie für das kanonische System, die einfache Gleichung:

$$\left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)' = \left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)_{u} \frac{n_{,}}{r_{,}^{2}} \cdot$$

Dieselbe führt ihrerseits zu einer Vereinfachung derjenigen Rechnung, durch welche sich die in jenen andern Gleichungen vorkommende Grösse α bestimmt. Man darf jetzt schreiben:

$$\left(\frac{x}{r}\right)' + \left(\frac{x_{,}}{r_{,}}\right)_{u} \frac{n_{,}}{r_{,}r}\sin\sigma + \frac{x_{,}}{r_{,}}\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) = \left(\frac{x}{r}\right)_{u}\frac{n}{r^{2}} + \frac{x}{r}\alpha .$$

Schreibt man auch die entsprechenden Gleichungen für die beiden andern Quotienten $\frac{y}{r}$ und $\frac{z}{r}$, um diese drei Gleichungen zu addiren, nachdem dieselben der Reihe nach mit $\frac{x}{r}$ $\frac{y}{r}$ $\frac{z}{r}$ multiplicirt worden sind, so ergibt sich, mit Rücksicht auf die beiden identischen Gleichungen:

$$\frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' = 0$$

$$\frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_{u} + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_{u} + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)_{u} = 0$$

der gesuchte Werth α. Man findet:

$$\frac{ds}{du_{,}}\frac{n_{,}}{r_{,}r}\sin\sigma + s\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) = \alpha .$$

Die Derivirten der Quotienten $\frac{x}{r}$ $\frac{y}{r}$ $\frac{z}{r}$ sind hiernach durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$\left(\frac{x}{r}\right)' + \left(\frac{x_{,}}{r_{,}} - \frac{xs}{r}\right)_{u}\frac{n_{,}}{r_{,}r}\sin\sigma + \left(\frac{x_{,}}{r_{,}} - \frac{xs}{r}\right)\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) = \left(\frac{x}{r}\right)_{u}\frac{n}{r^{2}}$$

39. $$\left(\frac{y}{r}\right)' + \left(\frac{y_{,}}{r_{,}} - \frac{ys}{r}\right)_{u}\frac{n_{,}}{r_{,}r}\sin\sigma + \left(\frac{y_{,}}{r_{,}} - \frac{ys}{r}\right)\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) = \left(\frac{y}{r}\right)_{u}\frac{n}{r^{2}}$$

$$\left(\frac{z}{r}\right)' + \left(\frac{z_{,}}{r_{,}} - \frac{zs}{r}\right)_{u}\frac{n_{,}}{r_{,}r}\sin\sigma + \left(\frac{z_{,}}{r_{,}} - \frac{zs}{r}\right)\left(\frac{r_{,}'}{r}\sin\sigma + \frac{r_{,}}{r}\cos\sigma\,\varepsilon' + \frac{r_{,}}{r}\zeta\right) = \left(\frac{z}{r}\right)_{u}\frac{n}{r^{2}} ,$$

welche für den Fall $\sigma = 0$, $\zeta = 0$ mit den Gleichungen 10. des § 43 übereinstimmen.

§ 50. Die freie Bewegung der Polarcoordinatenebene in ihrem Einflusse auf Knoten und Neigung.

Durch die Einführung des veränderlichen ε in die Differentialgleichungen der Bewegung geht die kanonische Form verloren. Die im vorigen Paragraphen ausserdem noch angebrachten Transformationen sind nicht geeignet, die kanonische Form wiederherzustellen. Dies hindert aber nicht, den willkürlichen Veränderlichen der Transformation in der Lösung des Problems eine Verwendung zu geben. Die kanonische Form des Systems hat ihren Zweck erfüllt, sobald man dazu gelangt ist, die derselben entsprechenden Elemente der Störung durch Quadraturen auszudrücken. Unter dem Integralzeichen kann man nachträglich ungehindert irgend eine Transformation der vorkommenden Veränderlichen anbringen, vorausgesetzt, dass dieselbe zugleich geeignet ist, jene andere Transformation zu fördern, welche, um der Methode der successiven Substitution gerecht zu werden, ohnedies ausgeführt werden muss.

Die Befürchtung, dass durch die Einführung der willkürlichen Veränderlichen $\varepsilon_{,}$ und ζ etwa weitere Verwicklungen in den Störungsgliedern entstehen könnten, ist unbegründet. Was ins Besondere die Veränderliche ζ betrifft, so kommt dieselbe, wie schon oben bemerkt worden ist, überhaupt nicht in der linearen Transformation der rechtwinkeligen Coordinaten vor. Der willkürlichen Veränderlichen $\varepsilon_{,}$ aber ist ebenso wie dem veränderlichen ε eine gewisse Grenze gesteckt, welche nicht überschritten werden darf, da nämlich, wie man im vorigen Paragraphen gesehen hat, das Product $\frac{r_{,}}{r}\,\varepsilon_{,}$ jederzeit eine kleine Grösse der ersten Ordnung ausdrücken soll. Die Veränderliche $\varepsilon_{,}$, indem sich dieselbe innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen hält, äussert keinen merklichen Einfluss auf die Coordinaten. Es bestehen desshalb zum Behufe der Transformation der rechtwinkeligen Coordinaten nach wie vor jene einfachen Gleichungen **19.** des § 46, und auch die Störungsgleichungen bleiben dieselben wie im § 46. Ebenso bleiben jene Gleichungen **26.** und **27.**, durch welche die ursprünglichen Elemente $p_{,}$ und $\omega_{,}$ als Funktion der neuen Elemente und von ε dargestellt werden, ungeändert. Die Gleichungen **30.** und **31.** dagegen, aus welchen im § 37 die Elemente $\vartheta_{,}$ und $i_{,}$ als Funktion der neuen Elemente bestimmt worden sind, erleiden hier eine wesentliche Umwandlung. In den neuen Gleichungen, welche deren Stelle einnehmen, haben neben der Veränderlichen ε auch die beiden andern willkürlichen Veränderlichen $\varepsilon_{,}$ und ζ einen Einfluss auf die gestörten Elemente.

Die Herleitung der drei Gleichungen, aus welchen sich die Elemente $\vartheta_{,}$ $i_{,}$ $n_{,}$ als Funktion der neuen Elemente und der willkürlichen Veränderlichen bestimmen, wenn der Ebene der Polarcoordinaten die freie Bewegung im Raume gestattet ist, hängt von den Entwicklungen des § 49 ab. Man hat dort die folgende Gleichung aufgestellt:

$$(x y' - y x')\cos^2\varepsilon_{,} + (x_{,} y_{,}' - y_{,} x_{,}')\sin^2\varepsilon + (x_{,} y' - y_{,} x' + x y_{,}' - y x_{,}')\cos\varepsilon_{,}\sin\varepsilon$$
$$+ (x y_{,} - y x_{,})(\cos\varepsilon\cos\varepsilon_{,}\,\varepsilon' + \sin\varepsilon\sin\varepsilon_{,}\,\varepsilon_{,}') = n_{,}\cos i_{,}\,.$$

Es bestehen ausserdem noch zwei andere ähnliche den Coordinatenverbindungen $x z$ und $y z$ entsprechende Gleichungen. Mit Hilfe der Gleichungen 38. des vorigen Paragraphen und der denselben entsprechenden Gleichungen der anderen Bahn kann man die neuen Elemente in die vorerwähnten Gleichungen einführen. In der vorliegenden hat man sich zu diesem Behufe ins Besondere der beiden folgenden Gleichungen zu bedienen:

$$x\,y\;-y\,x'+(x\,y_{,}'-y\,x_{,}')\sin\sigma+(x\,y_{,}-y\,x_{,})(\cos\sigma\,\varepsilon'+\zeta)=n\,\cos i$$

$$x_{,}\,y_{,}'-y_{,}\,x_{,}'+(x_{,}\,y'-y_{,}\,x')\sin\sigma+(x_{,}\,y-y_{,}\,x)(\cos\sigma\,\varepsilon_{,}'+\zeta)=n_{,}\cos i_{,}\;.$$

Man erhält dann die neue Gleichung:

$$n\cos i\cos^2\varepsilon_{,}+n_{,}\cos i_{,}\sin^2\varepsilon+(x_{,}\,y'-y_{,}\,x')\cos\sigma\cos\varepsilon\sin\varepsilon-(x\,y_{,}'-y\,x_{,}')\cos\sigma\cos\varepsilon_{,}\sin\varepsilon_{,}$$
$$+(x\,y_{,}-y\,x_{,})(\sin\sigma\cos\varepsilon_{,}\sin\varepsilon_{,}\,\varepsilon'+\sin\sigma\cos\varepsilon\sin\varepsilon\,\varepsilon_{,}'-\zeta\cos^2\varepsilon_{,}+\zeta\sin^2\varepsilon)=n_0\cos i_0\,.$$

Setzt man wieder $\cos\varepsilon=\cos\varepsilon_{,}=\cos\sigma=1$, ferner $\sin\varepsilon=\varepsilon$, $\sin\varepsilon_{,}=\varepsilon_{,}$, so hat man, mit Rücksicht auf die Flächenintegrale, im Ganzen die drei Gleichungen:

$$n\sin i\sin\vartheta\;+(y_{,}\,z'-z_{,}\,y')\,\varepsilon-(y\,z_{,}'-z\,y_{,}')\,\varepsilon_{,}-(y\,z_{,}-z\,y_{,})\,\zeta\;=n_0\sin i_0\sin\vartheta_0$$

40.
$$n\sin i\cos\vartheta\;+(x_{,}\,z'-z_{,}\,x')\,\varepsilon-(x\,z_{,}'-z\,x_{,}')\,\varepsilon_{,}-(x\,z_{,}-z\,x_{,})\,\zeta\;=n_0\sin i_0\cos\vartheta_0$$

$$n\cos i+c\,\varepsilon^2+(x_{,}\,y'-y_{,}\,x')\,\varepsilon-(x\,y_{,}'-y\,x_{,}')\,\varepsilon_{,}-(x\,y_{,}-y\,x_{,})\,\zeta\;=n_0\cos i_0\;,$$

aus welchen die Elemente $\vartheta_0\, i_0\, n_0$ als Funktion der neuen Elemente zu bestimmen sind. Diese Gleichungen treten an die Stelle jener Gleichungen 29., welche im § 47 für den Fall $\varepsilon+\varepsilon_{,}=0$, $\zeta=0$ zu dem angegebenen Zwecke aufgestellt worden sind.

Man hat nun auch in den mit $\varepsilon\,\varepsilon_{,}\,\zeta$ multiplicirten Gliedern der Gleichungen 40. die Polarcoordinaten an die Stelle der rechtwinkeligen zu setzen. Man schreibe desshalb die beiden Gleichungen:

$$\frac{y_{,}\,z'-z_{,}\,y'}{r\,r_{,}}=\frac{y_{,}}{r_{,}}\left(\frac{z}{r}\right)'-\frac{z_{,}}{r_{,}}\left(\frac{y}{r}\right)'+\frac{y_{,}\,z-z_{,}\,y}{r\,r_{,}}\,\frac{r'}{r}$$

$$\frac{y\,z_{,}'-z\,y_{,}'}{r\,r_{,}}=\frac{y}{r}\left(\frac{z_{,}}{r_{,}}\right)'-\frac{z}{r}\left(\frac{y_{,}}{r_{,}}\right)'+\frac{y\,z_{,}-z\,y_{,}}{r\,r_{,}}\,\frac{r_{,}'}{r_{,}}\,,$$

von denen die letztere sofort umgeschrieben werden darf in:

$$\frac{y\,z_{,}'-z\,y_{,}'}{r\,r_{,}}=\left(\frac{y\,z_{,}-z\,y_{,}}{r\,r_{,}}\right)_{u_{,}}\frac{n_{,}}{r_{,}^2}+\frac{y\,z_{,}-z\,y_{,}}{r\,r_{,}}\,\frac{r_{,}'}{r_{,}}\,.$$

Die erstere geht, mit Rücksicht auf die Gleichungen 39. des vorigen Paragraphen über in:

$$\frac{y_{,}\,z'-z_{,}\,y'}{r\,r_{,}}+\frac{y_{,}\,z_{,}'-z_{,}\,y_{,}'}{r\,r_{,}}\sin\sigma=\left(\frac{y_{,}\,z-z_{,}\,y}{r\,r_{,}}\right)_u\frac{n}{r^2}+\frac{y_{,}\,z-z_{,}\,y}{r\,r_{,}}\left(\frac{r'}{r}+\left(\frac{ds}{du_{,}}\,\frac{n_{,}}{r_{,}\,r}+\frac{s\,r_{,}'}{r}\right)\sin\sigma+\frac{r_{,}}{r}\,s\cos\sigma\,\varepsilon'+\frac{r_{,}}{r}\,s\,\zeta\right).$$

Gebraucht man nun die Abkürzung:

$$r'+\left(\frac{ds}{du_{,}}\,\frac{n_{,}}{r_{,}}+s\,r_{,}'\right)\sin\sigma+r_{,}\,s\cos\sigma\,\varepsilon'+r_{,}\,s\,\zeta=\varrho\,,$$

so nehmen die Gleichungen 40. mit Rücksicht auf die Flächenintegrale vorläufig die folgende Gestalt an:

$$n\sin i\sin\vartheta\;\;-\left(\frac{y\,z_{,}-z\,y_{,}}{r\,r_{,}}\right)_u\frac{n\,r_{,}}{r}\,\varepsilon-\left(\frac{y\,z_{,}-z\,y_{,}}{r\,r_{,}}\right)_{u_{,}}\frac{n_{,}\,r}{r_{,}}\,\varepsilon_{,}-\frac{y\,z_{,}-z\,y_{,}}{r\,r_{,}}\,(r_{,}\,\varrho\,\varepsilon+r\,r_{,}'\,\varepsilon_{,}+r\,r_{,}\,\zeta)=n_0\sin i_0\sin\vartheta_0$$

$$n\sin i\cos\vartheta\;\;-\left(\frac{x\,z_{,}-z\,x_{,}}{r\,r_{,}}\right)_u\frac{n\,r_{,}}{r}\,\varepsilon-\left(\frac{x\,z_{,}-z\,x_{,}}{r\,r_{,}}\right)_{u_{,}}\frac{n_{,}\,r}{r_{,}}\,\varepsilon_{,}-\frac{x\,z_{,}-z\,x_{,}}{r\,r_{,}}\,(r_{,}\,\varrho\,\varepsilon+r\,r_{,}'\,\varepsilon_{,}+r\,r_{,}\,\zeta)=n_0\sin i_0\cos\vartheta_0$$

$$n\cos i-c\,\varepsilon\,\varepsilon_{,}-\left(\frac{x\,y_{,}-y\,x_{,}}{r\,r_{,}}\right)_u\frac{n\,r_{,}}{r}\,\varepsilon-\left(\frac{x\,y_{,}-y\,x_{,}}{r\,r_{,}}\right)_{u_{,}}\frac{n_{,}\,r}{r_{,}}\,\varepsilon_{,}-\frac{x\,y_{,}-y\,x_{,}}{r\,r_{,}}\,(r_{,}\,\varrho\,\varepsilon+r\,r_{,}'\,\varepsilon_{,}+r\,r_{,}\,\zeta)=n_0\cos i_0$$

Um ins Besondere die Elemente ϑ_s und i_s als Funktion der neuen Elemente darzustellen, leitet man zweckmässig zwei andere Gleichungen aus den vorliegenden ab, indem man in dem jedesmaligen ersten Gliede das Element n eliminirt. Es finden dabei die identischen Gleichungen:

$$\frac{x z_, - z x_,}{r r_,} \sin \vartheta - \frac{y z_, - z y_,}{r r_,} \cos \vartheta \qquad = \sin (i - i_,) \sin u \sin u_, ,$$

$$\frac{x y_, - y x_,}{r r_,} \sin i - \left(\frac{x z_, - z x_,}{r r_,} \cos \vartheta + \frac{y z_, - z y_,}{r r_,} \sin \vartheta \right) \cos i = \sin (i - i_,) \cos u \sin u_,$$

eine Verwendung. Auf diesem Wege wird zugleich die Elimination der noch übrigen rechtwinkeligen Coordinaten vollzogen, und man hat, nachdem man noch die Abkürzungen $\frac{r_,}{r}\, \varepsilon = \eta$, $\frac{u_, r}{r_,}\, \varepsilon_, = n_s \eta_,$ und $r_, \varrho\, \varepsilon + r\, r_,' \varepsilon_, + r\, r_, \zeta = n_s \eta_{,,}$ eingeführt hat, die beiden Gleichungen:

$$\sin i (\cos u \sin u_, \, n\, \eta + \sin u \cos u_, \, n_s \eta_, + \sin u \sin u_, \, n_s \eta_{,,}) = n_s \sin i_s \sin (\vartheta_s - \vartheta)$$

$$\sin i (\sin u \sin u_, \, n\, \eta - \cos u \cos u_, \, n_s \eta_, - \cos u \sin u_, \, n_s \eta_{,,} - n_s \eta\, \eta_,) = n_s \big(\sin i \cos i_s - \cos i \sin i_s \cos (\vartheta_s - \vartheta) \big) .$$

wo η $\eta_,$ und $\eta_{,,}$ die willkürlichen Veränderlichen sind.

Die daraus berechneten Werthe ϑ_s und i_s sind Funktion der neuen Elemente n i ϑ ω. Von diesen soll das Element n, welches in den mit η multiplicirten Gliedern vorkommt, noch eliminirt werden. Zu diesem Zwecke kann man sich irgend einer der drei vorhin umgewandelten Gleichungen 40. bedienen. Diejenige Gleichung aber, welche sich zu dieser Elimination vorzugsweise geeignet zeigt, entsteht aus einer Verbindung von zweien der genannten Gleichungen in der ursprünglichen unter 40. aufgezeichneten Form. Da in der Theorie des Mondes $z_, = 0$ ist, so nehmen die beiden ersten der ursprünglichen Gleichungen 40. die folgende Gestalt an:

$$u \sin i \sin \vartheta + y_, (z' \varepsilon + z\, \zeta) + z\, y_,' \varepsilon_, = u_s \sin i_s \sin \vartheta_s$$

$$u \sin i \cos \vartheta + x_, (z' \varepsilon + z\, \zeta) + z\, x_,' \varepsilon_, = u_s \sin i_s \cos \vartheta_s .$$

Nachdem man die Werthe $y_, = r_, \sin (u_, + \vartheta)$ und $x_, = r_, \cos (u_, + \vartheta)$ eingesetzt hat, multiplicirt man die erstere mit $\cos (u_, + \vartheta)$, die andere mit $\sin (u_, + \vartheta)$, um dieselben alsdann von einander abzuziehen. Es entsteht die neue Gleichung:

$$n \sin i \sin u_, - z \frac{u_,}{r_,} \varepsilon_, = n_s \sin i_s \sin (u_, + \vartheta - \vartheta_s) .$$

Mit Rücksicht auf die schon oben zur Verwendung gekommene Abkürzung $\frac{u_, r}{r_,}\, \varepsilon_, = n_s \eta_,$ führt man dieselbe schliesslich über in:

41. $$n \sin i \sin u_, = n_s \sin i_s \sin (u_, + \vartheta - \vartheta_s) + n_s \sin i \sin u\, \eta_, .$$

Dies ist aber diejenige Gleichung, mit deren Hilfe die Elimination von n bewerkstelligt werden soll.

Durch die Elimination von n gehen die beiden obigen Gleichungen, welche zur Bestimmung von ϑ_s und i_s dienen sollen, über in:

$$\sin i_s \cos u \sin (u_, + \vartheta - \vartheta_s)\, \eta + \sin i \sin u\, (\cos u_, \eta_, + \sin u_, \eta_{,,} + \cos u\, \eta\, \eta_,) = \sin i_s \sin (\vartheta_s - \vartheta)$$

$$\sin i_s \sin u \sin (u_, + \vartheta - \vartheta_s)\, \eta - \sin i \cos u\, (\cos u_, \eta_, + \sin u_, \eta_{,,} + \cos u\, \eta\, \eta_,) = \sin i \cos i_s - \cos i \sin i_s \cos (\vartheta_s - \vartheta).$$

Die willkürlichen Veränderlichen $\eta_,$ und $\eta_{,,}$ kommen beide nur in dem Ausdrucke $\cos u_, \eta_, + \sin u\, \eta_{,,} + \cos u\, \eta\, \eta_,$ vor. Da dieselben auch in den sonst noch zur Lösung des Problems erforderlichen Gleichungen nicht weiter vorkommen, so versteht es sich, dass man eine einzige Veränderliche an deren Stelle setze. Indem man jenen Ausdruck mit ζ bezeichnet, schreibt man die beiden einfacheren Gleichungen:

42. $$\sin i_s \cos u \sin (u_, + \vartheta - \vartheta_s)\, \eta + \sin i \sin u\, \zeta = \sin i_s \sin (\vartheta_s - \vartheta)$$

43. $$\sin i_s \sin u \sin (u_, + \vartheta - \vartheta_s)\, \eta - \sin i \cos u\, \zeta = \sin i \cos i_s - \cos i \sin i_s \cos (\vartheta_s - \vartheta),$$

in welchen anstatt der ursprünglichen $\varepsilon\, \varepsilon_, \zeta$ nur noch die zwei willkürlichen Veränderlichen η und ζ vorkommen. Mit deren Hilfe lassen sich die Elemente ϑ_s und i_s als Funktion der neuen Elemente $\vartheta\, i\, \omega$ und der willkürlichen Veränderlichen η und ζ darstellen.

Um die ursprünglichen gestörten Elemente als Funktion der neuen Elemente darzustellen, sind neben den obigen drei Gleichungen 40. noch die drei Gleichungen 21. des § 46, im Ganzen also sechs Gleichungen gegeben. Die erstgenannten lassen sich zur Bestimmung der Elemente $\vartheta_s\, i_s\, u_s$ verwenden. Aus den Gleichungen 21. habe ich im § 47 die beiden Gleichungen 26. und 27. hergeleitet, durch welche die Elemente p_s und ω_s bestimmt sind. Eine dritte daraus hergeleitete Gleichung ist nicht zur Verwendung gekommen. Da übrigens ausser den genannten fünf kein weiteres gestörtes Element in den sechs Gleichungen vorkommt, so versteht es sich, dass eine dritte aus 21. hergeleitete Gleichung nur Solches leisten würde, was auch die fünf übrigen schon zur Verwendung gekommenen Gleichungen geben können. Eliminirt man aus den Gleichungen 21. die beiden Grössen $\sin u_s$ und $\cos u_s$, so erhält man:

44. $$\cot i_s \sin i \sin u = \sin (\vartheta - \vartheta_s) \cos u + \cos i \cos (\vartheta - \vartheta_s) \sin u + \eta \sin u_{,,}.$$

In der That führt die Elimination von ζ aus jenen Gleichungen 42. und 43., welche selbst aus 40. hergenommen sind, gleichfalls zu der vorliegenden Gleichung.

Sogleich zu Anfang des Paragraphen ist bemerkt worden, dass die Gleichungen 26. und 27., durch welche die Elemente p_s und ω_s als Funktion der neuen Elemente und von ε dargestellt werden, zufolge der Annahme, dass die Ebene der Polarcoordinaten frei beweglich sei, keine Aenderung erleiden. Demungeachtet steht auch das Perigäum der Mondbahn unter dem Einflusse der willkürlichen Veränderlichen ζ. Die Gleichung 27. behält die Form:

$$\sin\left(\omega_s - \omega - \sin^2 \frac{i}{2} \sin 2 (\vartheta_s - \vartheta)\right) = \frac{r\eta}{r_s} \frac{ds}{du}.$$

Da aber die Grösse $\vartheta_s - \vartheta$, welche in der Gleichung 27. eine Stelle einnimmt, von der Veränderlichen ζ abhängig ist, wie man aus der Gleichung 42., aus welcher jene Grösse bestimmt werden muss, ersieht, so überträgt sich der Einfluss dieser Veränderlichen auch auf das Perigäum.

§ 51. Reduction des Knotens und der Neigung in der Theorie des Mondes.

Um die Uebersicht über diejenigen Glieder der Elemente ϑ_2 und i_2, welche sich vermittelst der willkürlichen Veränderlichen wegbringen lassen, zu erleichtern, streiche man in den Gleichungen 42. und 43. des vorigen Paragraphen alle diejenigen Glieder, welche die erste Ordnung übersteigen, weg. Man behält die einfacheren Gleichungen:

$$\cos u \sin u_, \eta + \sin u \zeta = \vartheta_2 - \vartheta$$

$$\sin u \sin u_, \eta - \cos u \zeta = \frac{\sin i - \sin i_2}{\sin i}.$$

Man kann dieselben, indem man $\zeta - \eta \cos u_,$ an die Stelle von ζ setzt, auch in der folgenden Form anschreiben:

$$\vartheta_2 - \vartheta = -\eta \sin(u - u_,) + \zeta \sin u$$

$$\frac{\sin i_2 - \sin i}{\sin i} = -\eta \cos(u - u_,) + \zeta \cos u.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass sich alle diejenigen Glieder des Knotens beseitigen lassen, welche einen der beiden Factoren $\sin(u - u_,)$ und $\sin u$ haben; und dem entsprechend auch diejenigen Glieder der Neigung, welche mit $\cos(u - u_,)$ oder mit $\cos u$ multiplicirt sind. Dieser Absicht kommt es zu Statten, dass die Elemente ϑ_2 und i_2 in einer gewissen Beziehung zu einander stehen, der zufolge die Coefficienten der so eben erwähnten Glieder, einzelne Ausnahmen abgerechnet, in dem einen und in dem andern Elemente identisch sind, in solcher Weise, dass durch die passende Wahl der Veränderlichen η und ζ eben diese Glieder in den beiden Elementen gleichzeitig fortgeschafft werden können.

Die ersten Näherungen der Elemente ϑ_2 und i_2 sind im § 36 in der folgenden Form aufgestellt worden:

$$\vartheta_2 - \vartheta_0 = -\frac{3}{4}\lambda(v_, + e_, \sin v_,)$$

$$+ \frac{3}{8}(\lambda + \nu)\frac{p_,}{r_,}\sin 2u_, + \frac{45}{8}\lambda e^2 \frac{p_,}{r_,}\sin(2u - 2v) - \frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\sin 2w - \sin 2u\Big)$$

$$\frac{\sin i_2}{\sin i} - 1 = \frac{3}{8}(\lambda + \nu)\frac{p_,}{r_,}\cos 2u_, + \frac{45}{8}\lambda e^2 \frac{p_,}{r_,}\cos(2u - 2v) - \frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\cos 2w - \cos 2u\Big),$$

wo man ausser anderen auch die mit $\lambda^2 e$ multiplicirten Bestandtheile fortgelassen hat. Die grössten Störungen, welche die Elemente ϑ_2 und i_2 erleiden, sind hiernach Funktion von $v_,$ allein, und also von dem Orte der Sonne allein abhängig. Diese Glieder können vermittelst der willkürlichen Veränderlichen η und ζ nicht weggebracht werden. Man weiss übrigens, dass auch in jener anderen Transformation, welche sich nach der Methode der successiven Substitution vollzieht, diejenigen Bestandtheile der Elemente, welche Funktion von $v_,$ allein sind, unberührt bleiben. In diesen Bestandtheilen ist bekanntlich die Methode der variirten Näherung besser angebracht. Der Umstand, dass die erwähnten Glieder der Elemente ϑ_2 und i_2 vermittelst η und ζ nicht beseitigt werden können, hindert also nicht, dass jene

andere Transformation, welche durch die Methode der successiven Substitution vorgeschrieben ist, in den willkürlichen Veränderlichen η und ζ einen Ersatz finden kann. Funktion von v sind nur die beiden letzten Glieder in jedem der vorliegenden Näherungswerthe $\vartheta_,$ und $i_,$. Dieselben zeigen aber in der That diejenige Form, welche nach dem Obigen ein Störungsglied haben muss, damit es vermittelst der willkürlichen Veränderlichen η und ζ weggebracht werden könne.

Im § 48 ist gezeigt worden, welche Umwandlung das Perigäum durch die Einführung der willkürlichen Veränderlichen η in die Störungsgleichungen erfährt. Es ist leicht zu sehen, dass die Umwandlung des Perigäums von ungleich grösserem Einflusse auf die Gestaltung der Analysis ist, als die des Knotens und der Neigung. Es lässt sich desshalb rechtfertigen, dass die Veränderliche η, wenn dieselbe überhaupt in die Störungsgleichungen eingeführt wird, jedenfalls in der Reduction des Perigäums ihre Verwendung finden soll. Die Frage, ob der Analysis damit in Wirklichkeit ein Dienst geleistet sei, kann aber erst dann entschieden werden, nachdem man den Einfluss kennen gelernt hat, welchen der zur Reduction des Perigäums verwendete Werth η auf den Knoten und die Neigung hat.

Im § 48 ist ins Besondere gezeigt worden, dass der Werth 35:

$$\eta = -2\left(g\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\cos w + h\,\frac{p_,}{r_,}\,\frac{r}{p}\cos(w - v)\right)$$

geeignet ist, die beiden grössten Störungen des Perigäums, die Variation und die Evection des Mondes, gleichzeitig zu beseitigen. In die vorhin durch Tilgung aller Glieder höherer Ordnung vereinfachten Gleichungen 42. und 43. setze man zunächst die ersten Näherungen von $\vartheta_,$ und $i_,$ ein. Man erhält die ersten Näherungen der neuen Elemente:

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\frac{3}{4}\lambda(v_, + e_,\sin v_,)$$
$$+\frac{3}{8}(\lambda+\nu)\frac{p_,}{r_,}\sin 2u_, + \frac{45}{8}\lambda e^2\frac{p_,}{r_,}\sin(2u - 2v) - \frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\sin 2w - \sin 2u\Big) + \eta\sin(u - u_,) - \zeta\sin u$$

$$\frac{\sin i}{\sin i_0} - 1 = \frac{3}{8}(\lambda+\nu)\frac{p_,}{r_,}\cos 2u_, + \frac{45}{8}\lambda e^2\frac{p_,}{r_,}\cos(2u - 2v) - \frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\cos 2w - \cos 2u\Big) + \eta\cos(u - u_,) - \zeta\cos u.$$

Berücksichtigt man zunächst das mit $\cos w$ multiplicirte Glied des obigen Werthes η, durch welches die Variation des Mondes beseitigt wird, so sieht man leicht, dass in dem Knoten und in der Neigung beziehungsweise die mit $\sin 2w$ und $\cos 2w$ multiplicirten Glieder von demselben beeinflusst sind. Es ist aber Nichts weniger als eine Reduction, was die Substitution dieses Bestandtheils von η in den Coefficienten der erwähnten Glieder bewirkt. Denn diese Coefficienten erhalten durch die Substitution einen noch grösseren Zahlenwerth. Führt man auch jenen anderen mit $\cos(w - v)$ multiplicirten Bestandtheil von η ein, durch welchen die Evection des Mondes aus dem Perigäum beseitigt worden ist, so entstehen in den neuen Elementen ϑ und i verschiedene Glieder, welche den ursprünglichen Elementen $\vartheta_,$ und $i_,$ zwar nicht fremd sind, welche aber dort in solchem Maasse kleinere Coefficienten haben, dass sie neben den Gliedern der obigen Näherungen unberücksichtigt geblieben sind.

Der zur Reduction des Perigäums dienliche Werth η bringt demnach in dem Knoten und in der Neigung der Mondbahn Aenderungen hervor, von welchen nicht mehr behauptet werden kann, dass sie in dem Sinne jener anderen, nach der Methode der successiven Substitution vorgeschriebenen Transformation liegen. Es möchte daher kaum noch zweifelhaft sein, dass es vortheilhafter ist, $\eta = 0$ zu setzen, und die oben erwähnten Reductionen des Perigäums der Methode der successiven Substitution zu über-

lassen. Die beiden anderen Elemente, der Knoten und die Neigung bleiben dann wenigstens unverändert, während dieselben durch die Einführung von η Störungen erleiden, welche beträchtlich grösser sind als die der Annahme $\eta = 0$ entsprechenden.

Von der Annahme ausgehend, dass der Brennpunkt der beweglichen Ellipse, durch welche die Mondbahn dargestellt werden kann, mit dem Mittelpunkte der Erde zusammenfalle, was durch die Gleichung $\varepsilon = 0$ ausgesprochen ist, habe ich in dem vierten Abschnitte die Störungen der Mondbahn in ihren ersten Näherungen entwickelt. Die Richtung der Resultante, welche sich aus den beiden Kräften zusammensetzt, mit welchen der Mond gleichzeitig von der Erde und von der Sonne angezogen wird, geht bekanntlich nicht durch den Mittelpunkt der Erde, sondern ist in einer Geraden enthalten, welche zwischen dem Orte der Erde und dem der Sonne hindurchgeht. Dies hat die Veranlassung gegeben zu untersuchen, in welcher Weise die Annahme, dass der Brennpunkt der Ellipse von dem Orte der Erde weg nach einem anderen der Ebene der drei Körper angehörigen Punkte verlegt sei, auf die Störungen der Mondbahn einwirke. Diese Untersuchung über die zweckmässigste Wahl der Veränderlichen ε ist jetzt zu ihrem Abschlusse gekommen. Ich habe geglaubt, es werde dieselbe dem Leser nicht gerade nutzlos erscheinen, da sie doch geeignet ist, diejenigen Bedenken niederzuschlagen, welche gegen die Annahme $\varepsilon = 0$ erhoben werden können.

Zu derjenigen Transformation der Polarcoordinaten, welche in der Verlegung des Brennpunktes der beweglichen Ellipse ihren Grund hat, ist in diesem Abschnitte noch eine andere hinzugekommen, da man der Ebene der Polarcoordinaten die Freiheit gelassen hat, von der veränderlichen Ebene der Bahn um einen kleinen Winkel abzuweichen. Auf die Neigung dieser beiden Ebenen zu einander bezieht sich die willkürliche Veränderliche ζ, und dies ist nun die einzige Veränderliche, welche zum Behufe der Reduction des Knotens und der Neigung übrig bleibt. Wenn man gestattet, dass zu den von $r_,$ allein abhängigen Gliedern dieser beiden Elemente, welche ohnedies nicht fortgeschafft werden sollen, noch weitere Glieder der gleichen Beschaffenheit hinzukommen, so ist man auch jetzt, nachdem $\eta = 0$ gesetzt worden ist, noch im Stande, die oben erwähnten von r abhängigen Glieder aus den beiden Näherungen gleichzeitig fortzuschaffen.

Die von r abhängigen Glieder der Elemente ϑ und i lassen sich, für den Fall $\eta = 0$, beziehungsweise in den folgenden Ausdrücken zusammenfassen:

$$-\frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\sin 2w - \sin 2u\Big) - \zeta \sin u$$

$$-\frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\cos 2w - \cos 2u\Big) - \zeta \cos u\,.$$

Man mache nun von den identischen Gleichungen Gebrauch:

$$\sin 2w + \sin 2u_, = 2\sin u \cos(u - 2u_,)$$

$$\cos 2w + \cos 2u_, = 2\cos u \cos(u - 2u_,)\,,$$

um die vorliegenden Ausdrücke überzuführen in:

$$-\frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\big(2\sin u\cos(u-2u_,) - \sin 2u_,\big) - 2\sin u\cos u\Big) - \zeta\sin u$$

$$-\frac{3\lambda^2}{8}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\big(2\cos u\cos(u-2u_,) - \cos 2u_,\big) - 2\cos^2 u + 1\Big) - \zeta\cos u\,.$$

Indem man sich zur Bestimmung von ζ der folgenden Gleichung bedient:

45. $$\zeta = -\frac{3\lambda^2}{4}\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2\Big((1+\lambda)\cos(u - 2u_{\prime}) - \cos u\Big).$$

bringt man die von r abhängigen Glieder weg, und man behält die ersten Näherungen von ϑ und i, als Funktion von $r_{\prime}$ allein, in der folgenden Form:

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\frac{3}{4}\lambda(v_{\prime} + e_{\prime}\sin v_{\prime}) + \frac{3}{8}(\lambda + \nu + \lambda^2)\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\sin 2u_{\prime} + \frac{45}{8}\lambda e^2\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\sin(2u - 2r)$$

$$\frac{\sin i}{\sin i_0} - 1 = -\frac{3}{8}\lambda^2\left(\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\right)^3\left(\frac{r}{p}\right)^2 + \frac{3}{8}(\lambda + \nu + \lambda^2)\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\cos 2u_{\prime} + \frac{45}{8}\lambda e^2\frac{p_{\prime}}{r_{\prime}}\cos(2u - 2r).$$

Auf diesem Wege kann man die von r abhängigen Glieder der ersten Näherung des Knotens und der Neigung, kleine Bruchtheile abgerechnet, beseitigen. Die Annahme, dass sich die neuen Elemente ϑ und i als Funktion von $r_{\prime}$ allein darstellen, verträgt sich demnach mit einer immerhin beträchtlichen Genauigkeit. Die von dem jedesmaligen Orte des Mondes in seiner Bahn abhängigen Störungen der genannten Elemente werden durch die vorgeschlagene Transformation auf erheblich kleinere Werthe zurückgeführt. Es bleiben in Folge dessen die von dem Orte der Sonne allein abhängigen Glieder weit überwiegend. Wenn auch die letzteren schon ursprünglich beträchtlicher sind als die ersteren, so haben dieselben doch eine in solchem Maasse längere Periode, dass sich die Geschwindigkeit der Variation in den beiden Arten von Störungen ursprünglich in ungefähr gleichem Maasse bemerklich macht.

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, dass die Veränderliche ζ eine vortheilhafte Verwendung zur Reduction des Knotens und der Neigung der Mondbahn gestattet. Diese Reduction ist um so förderlicher, als sie in jenen Quadraturen, durch welche die Elemente dargestellt sind, kaum eine Aenderung der Form zur Folge hat. Es ist schon wiederholt darauf hingewiesen worden, dass man die in Rede stehende Transformation ohne Weiteres bewerkstelligt, indem man in der Störungsfunktion die ursprünglichen Polarcoordinaten geradezu gegen die entsprechenden neuen vertauscht.

Indem man $\eta = 0$ setzt, behält man die einfacheren Gleichungen:

27. $$\omega_g - \omega = \sin^2\frac{i}{2}\sin 2(\vartheta_g - \vartheta)$$

42. $$\sin i_g \sin(\vartheta_g - \vartheta) = \zeta \sin i \sin u$$

43. $$\cos i \sin i_g \cos(\vartheta_g - \vartheta) - \sin i \cos i_g = \zeta \sin i \cos u.$$

Mit deren Hilfe hat man, den Aufstellungen des § 45 zufolge, in den Integralgleichungen IV. V. nad VI. des § 46 auf der linken Seite die Elimination der ursprünglichen Elemente ω_g, ϑ_g und i_g auszuführen. Die Gleichung 27. ist zu dieser Elimination unmittelbar verwendbar. Um die beiden anderen Gleichungen zu diesem Zwecke dienlicher zu machen, multiplicire ich die Gleichung 43. mit $\cos i$. Ich schreibe alsdann die identische Gleichung:

$$\cos i\Big(\cos i \sin i_g \cos(\vartheta_g - \vartheta) - \sin i \cos i_g\Big) = \sin i_g \cos(\vartheta_g - \vartheta) - \sin i\Big(\cos i \cos i_g + \sin i \sin i_g \cos(\vartheta_g - \vartheta)\Big).$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung

$$\cos i \cos i_g + \sin i \sin i_g \cos(\vartheta_g - \vartheta) = 1$$

setzend, führe ich die Gleichung 43 über in:

$$\sin i_\varepsilon \cos(\vartheta_\varepsilon - \vartheta) - \sin i = \zeta \sin i \cos i \cos u .$$

Die Elimination von $\sin i_\varepsilon$ zwischen 42. und 43. ist nun leicht zu bewerkstelligen. Man findet zur Bestimmung von ϑ_ε die Gleichung:

46. $$\operatorname{tg}(\vartheta_\varepsilon - \vartheta) = \frac{\zeta \sin u}{1 + \zeta \cos i \cos u} .$$

Eliminirt man aber $\vartheta_\varepsilon - \vartheta$ zwischen eben diesen beiden Gleichungen, so findet man mit Rücksicht darauf, dass $\zeta^2 \sin^2 i$ neben der Einheit gestrichen werden darf, zur Bestimmung von i_ε die Gleichung:

47. $$\sin^2 i_\varepsilon = \sin^2 i (1 + 2\zeta \cos i \cos u + \zeta^2) .$$

Indem man in jene Integralgleichungen IV. V. und VI. auf der linken Seite die aus 27., 46. und 47. sich ergebenden Werthe ω_ε, ϑ_ε und i_ε einsetzt, gelangt man zu denjenigen Integralgleichungen, aus welchen die neuen Elemente ω i ϑ unmittelbar bestimmt werden können.

Nachträge und Berichtigungen.

Seite 5, Zeile 15 v. o. statt Hieraus ist lies Hieraus lässt sich die Richtigkeit der oben aufgestellten Coordinatenwerthe $X\ Y\ Z$ ersehen. Es ist zugleich

Seite 6, Zeile 6 v. u. statt $\frac{\sin(\mu_0 - \varepsilon)}{\cos \mu_0}$ lies $\frac{\sin(\mu_0 - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$

» 20, » 6 v. o. den Schlusssatz »Es ist auch nicht zu übersehen . . .« zu streichen. Auch in Phl. III wird λ als eine Beständige aufgefasst, vgl. dort § 22. In dem Vorliegenden bezeichnet λ das Verhältniss der mittleren Bewegung in der äusseren Bahn zu der in der inneren Bahn. In Phl. III ist λ nicht genau das umgekehrte Verhältniss, da das letztere dort als eine Veränderliche gedacht werden muss. Die genannte Grösse bezeichnet nur den Hauptbestandtheil des umgekehrten Verhältnisses, welcher durch eine Beständige ausgedrückt werden kann.

Seite 24, Zeile 1 v. u. statt $\left(\frac{d\Omega}{ds}\frac{ds}{du}\right.$ lies $\frac{d\Omega}{ds}\left(\frac{ds}{du}\right.$

» 34, » 9 v. u. statt $r\,r'' -$ lies $r\,r'' =$

» 34, » 3 v. u. statt $\frac{n^2}{r^2} =$ lies $\frac{n^2}{r^3} -$

» 39, » 2 v. o. statt $\left(\frac{r}{p}\right)^4 p^2$ lies $\left(\frac{r}{p}\right)^4 p'^2$

» 48, » 3 v. o. »Dies ist eine weitere Schwierigkeit, welche die Variation der elliptischen Elemente mit sich gebracht hat«. Es soll damit nicht gesagt sein, dass zufolge der auf die Variation der elliptischen Elemente gegründeten Störungstheorie auch in denjenigen gestörten Elementen, welche nicht Winkelgrössen sind, die der Zeit proportionalen Glieder unvermeidlich seien. Ich bin schon in Phl. III zu einem andern Resultate gelangt. Von den sechs im § 22 dort aufgestellten Störungsgleichungen haben nur zwei die Bestimmung von Winkelgrössen zum Zwecke. Die der Zeit proportionalen Glieder, welche sich durch die Integration einer dritten Störungsgleichung ergeben, lassen sich durch die im § 26 dort angegebene Transformation beseitigen.

Seite 96, Zeile 12 v. o. statt $m\sqrt{\frac{m_,}{1+m_,}}$ lies $m_,\sqrt{\frac{\mu_,}{1+m_,}}$

» 113, » 10 v. o. statt $\left(\frac{r_,}{p_,}\right)^3$ lies $\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3$

» 114, » [illegible] v. o. statt $\int^{\circ}\left(\frac{p_,}{p_,}\right)^3 dt$ lies $\int^{\circ}\left(\frac{p_,}{r_,}\right)^3 dt$

» 135, » 4 v. o. statt $(x' + x_, \varepsilon')$ lies $(x' + x_, \varepsilon')^2$

» 135, » 6 v. o. statt $z\,n_,'$ lies $z\,y_,'$

» 145, » 5 v. o. statt $(\xi_,' \cos\varepsilon + \xi' \sin\varepsilon)$ lies $(\xi_,' \cos\varepsilon + \xi' \sin\varepsilon)^2$

Berichtigungen zu Pbl. III.

Seite 1, Zeile 11, 8, 6 v. u. statt $\varkappa$ lies jedesmal $-\varkappa$
» 30, » 14 v. o. statt h lies h_0
» 58, » 11 v. u. statt $\sin^2 \frac{i}{2} \sin u_0$ lies $\cos^2 \frac{i}{2} \sin u_0$
» 70, » 8 v. u. statt $\left(\frac{q}{r}\right)^2$ lies $\lambda \left(\frac{q}{r}\right)^2$
» 71, » 9 v. o. statt $\sin r$ lies $\sin r_0$
» 71, » 1 v. u. statt $\sqrt{\frac{p}{p_0}}\, S$ lies $\sqrt{\frac{p_0}{p}}\, S$
» 72, » 3 v. o. statt $\sqrt{\frac{p}{p_0}}\, S$ lies $\sqrt{\frac{p_0}{p}}\, S$
» 82, » 16 v. u. statt $+ g$, lies $+ 2g$,
» 83, » 9 v. u. statt $\frac{d\sigma_0}{dt_0} -$ lies $\frac{d\sigma_0}{dt_0} +$

Karlsruhe. Druck der G. BRAUN'schen Hofbuchdruckerei.